日　付	学　科	学　年	番　　号	名　　前

第4章 6 「留数と留数定理」 第1回

例題 関数 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-2)(z+4)^2}$ の次の孤立特異点における留数を求めよ．

(1) 孤立特異点 2　　(2) 孤立特異点 -4

解 教科書 p.143 の留数の計算を用いる．

(1) $\lim\limits_{z\to 2}(z-2)f(z)=\lim\limits_{z\to 2}(z-2)\cdot\dfrac{e^z}{(z-2)(z+4)^2}=\lim\limits_{z\to 2}\dfrac{e^z}{(z+4)^2}=\dfrac{e^2}{36}\neq 0$

よって，2 は 1 位の極である．　$\therefore$　$\mathrm{Res}[f,\ 2]=\dfrac{e^2}{36}$

(2) $\lim\limits_{z\to -4}(z+4)^2f(z)=\lim\limits_{z\to -4}(z+4)^2\cdot\dfrac{e^z}{(z-2)(z+4)^2}=\lim\limits_{z\to -4}\dfrac{e^z}{z-2}=-\dfrac{1}{6e^4}\neq 0$

よって，-4 は 2 位の極である．

$$\mathrm{Res}[f,\ -4]=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -4}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left\{(z+4)^2\cdot\frac{e^z}{(z-2)(z+4)^2}\right\}$$
$$=\lim_{z\to -4}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z-2}\right)=\lim_{z\to -4}\frac{(e^z)'\cdot(z-2)-e^z\cdot(z-2)'}{(z-2)^2}=\lim_{z\to -4}\frac{ze^z-3e^z}{(z-2)^2}=-\frac{7}{36e^4}$$

1. 関数 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)(z+4)^2}$ の次の孤立特異点における留数を求めよ．

(1) 孤立特異点 1

(2) 孤立特異点 -4

例題 原点を中心とする半径 5 の円を C とするとき，$\displaystyle\int_C\frac{e^z}{(z-2)(z+4)^2}\,dz$ の値を求めよ．

解 $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-2)(z+4)^2}$ とおく．$f(z)$ の C の内部にある孤立特異点は $2,\ -4$ であり，この点における留数は前例題で求めた通り $\mathrm{Res}[f,\ 2]=\dfrac{e^2}{36}$, $\mathrm{Res}[f,\ -4]=-\dfrac{7}{36e^4}$ である．教科書 p.144 の留数定理より

$$\int_C\frac{e^z}{(z-2)(z+4)^2}\,dz=2\pi i\big(\mathrm{Res}[f,\ 2]+\mathrm{Res}[f,\ -4]\big)=2\pi i\left(\frac{e^2}{36}-\frac{7}{36e^4}\right)=\frac{\pi}{18}\left(e^2-\frac{7}{e^4}\right)i$$

2. 原点を中心とする半径 5 の円を C とする．積分の値を求めよ．$\displaystyle\int_C\frac{e^z}{(z-1)(z+4)^2}\,dz$