日　付	学　科	学　年	番　　号	名　　前
／				

第4章 5 「関数の展開」 第3回

例題 導関数を利用することにより，関数 $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$ の 0 を中心とするテイラー展開を求めよ．

解 教科書 p.138 にある通り，べき級数は収束半径内において正則で各項ごとに微分することができ，その収束半径が変わらないことが知られている．$\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \quad (|z| < 1)$ だから $\left(\dfrac{1}{1-z}\right)' = \dfrac{1}{(1-z)^2}$ に注意し，両辺を微分することにより $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots \quad (|z| < 1)$ を得る．

1. 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(z) = \dfrac{1}{4-z}$ の 2 を中心とするテイラー展開を求めよ．

(2) 導関数を利用することにより，関数 $g(z) = \dfrac{1}{(4-z)^2}$ の 2 を中心とするテイラー展開を求めよ．

例題 関数 $g(z) = \dfrac{1}{z^2 + 9z + 20}$ の孤立特異点を中心とするローラン展開を求めよ．

解 $g(z) = \dfrac{1}{(z+4)(z+5)}$ より，孤立特異点は -4 と -5 である．

(i) 孤立特異点 -4 を中心とするローラン展開：

$$\frac{1}{z+5} = \frac{1}{1 - \{-(z+4)\}} \text{ より，}$$

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z+4} \cdot \frac{1}{z+5} \\ &= \frac{1}{z+4}\{1 - (z+4) + (z+4)^2 - (z+4)^3 + \cdots\} \\ &= \frac{1}{z+4} - 1 + (z+4) - (z+4)^2 + \cdots \end{aligned}$$

$$(0 < |z+4| < 1)$$

(ii) 孤立特異点 -5 を中心とするローラン展開：

$$\frac{1}{z+4} = -\frac{1}{1 - (z+5)} \text{ より，}$$

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z+4} \cdot \frac{1}{z+5} \\ &= \{-1 - (z+5) - (z+5)^2 - (z+5)^3 - \cdots\}\frac{1}{z+5} \\ &= -\frac{1}{z+5} - 1 - (z+5) - (z+5)^2 - \cdots \end{aligned}$$

$$(0 < |z+5| < 1)$$

2. 関数 $g(z) = \dfrac{1}{z^2 + 3z + 2}$ の孤立特異点を中心とするローラン展開を求めよ．