日　付	学　科	学　年	番　　号	名　　前
／				

第 4 章 5 「関数の展開」 第 1 回

例題 関数 $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ の 0 を中心とするテイラー展開を求めよ．

解 教科書 p.137 にある通り，等比数列の公式から次のべき級数が得られる．

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \qquad (\,|z| < 1\,)$$

一般に，関数のべき級数への展開は一意的に得られることが知られている．したがって，上記を $f(z)$ の 0 を中心とするテイラー展開と答えてよい．今後，このべき級数を用いて，テイラー展開やローラン展開を求めることが多いので覚えておくとよい．

1. 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(z) = \dfrac{1}{2-z}$ の 0 を中心とするテイラー展開を求めよ．

(2) 関数 $f(z) = \dfrac{1}{2-z}$ の 1 を中心とするテイラー展開を求めよ．

例題 関数 $g(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ の 2 を中心とするローラン展開を求めよ．

解 2 は $g(z)$ の孤立特異点である． $\dfrac{1}{z-3} = -\dfrac{1}{1-(z-2)}$ と変形する．$Z = z-2$ とおいて

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{1-Z} = -(1 + Z + Z^2 + Z^3 + \cdots) = -1 - (z-2) - (z-2)^2 - (z-2)^3 - \cdots \quad (|z-2| < 1)$$

を得る． $\therefore\ \ g(z) = \dfrac{1}{z-2} \cdot \dfrac{1}{z-3} = \dfrac{1}{(z-2)}\{-1 - (z-2) - (z-2)^2 - (z-2)^3 - \cdots\}$

$$= -\frac{1}{z-2} - 1 - (z-2) - (z-2)^2 - \cdots \quad (0 < |z-2| < 1)$$

なお，$z - 2 \fallingdotseq 0$ のため，z の範囲は $0 < |z-2| < 1$ である．

2. 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $g(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$ の 3 を中心とするローラン展開を求めよ．

(2) 関数 $g(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ の 0 を中心とするローラン展開を求めよ．