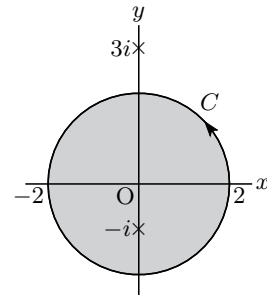


| 日付 | 学科 | 学年 | 番号 | 名前 |
|----|----|----|----|----|
| /  |    |    |    |    |

## 第4章 4 「コーシーの積分定理」「コーシーの積分表示」 第1回

例題 原点を中心とする半径2の円を  $C$  とするとき、次の積分の値を求めよ。

(1)  $\int_C \frac{1}{z-3i} dz$                       (2)  $\int_C \frac{2}{z+i} dz$



解 (1) 点  $3i$  は  $C$  の外部にある。コーシーの積分定理より  $\int_C \frac{1}{z-3i} dz = 0$

(2) 与式を変形して  $\int_C \frac{2}{z+i} dz = 2 \int_C \frac{1}{z-(-i)} dz$  を得る。変形後の式にコーシーの積分定理を用いる。

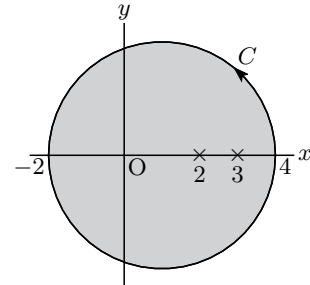
点  $-i$  は  $C$  の内部にあるので、 $\int_C \frac{2}{z+i} dz = 2 \int_C \frac{1}{z-(-i)} dz = 2 \cdot (2\pi i) = 4\pi i$

1. 原点を中心とする半径2の円を  $C$  とするとき、次の複素積分の値を求めよ。

(1)  $\int_C \frac{4}{z-3i} dz$                       (2)  $\int_C \frac{3}{z+i} dz$

例題 点1を中心とする半径3の円を  $C$  とするとき、次の積分の値を求めよ。

(1)  $\int_C \frac{z^3}{z-3} dz$                       (2)  $\int_C \frac{2e^z}{z-2} dz$



解 (1) 積分記号の中の式  $\frac{z^3}{z-3}$  の分子を  $f(z) = z^3$  とおく。

点3は  $C$  の内部にあるから、コーシーの積分表示より

$$f(3) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-3} dz$$

両辺に  $2\pi i$  をかけて  $\int_C \frac{f(z)}{z-3} dz = 2\pi i f(3)$  となる。  $\therefore \int_C \frac{z^3}{z-3} dz = \int_C \frac{f(z)}{z-3} dz = 2\pi i f(3) = 2\pi i \cdot 3^3 = 54\pi i$

(2) 被積分関数  $\frac{2e^z}{z-2}$  の分子を  $g(z) = 2e^z$  とおく。点2は  $C$  の内部にあるから、コーシーの積分表示より

$g(2) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{z-2} dz$  を得る。両辺に  $2\pi i$  をかけて  $\int_C \frac{g(z)}{z-2} dz = 2\pi i g(2)$  となる。

$$\therefore \int_C \frac{2e^z}{z-2} dz = \int_C \frac{g(z)}{z-2} dz = 2\pi i g(2) = 2\pi i (2e^2) = 4\pi e^2 i$$

2. 点1を中心とする半径3の円を  $C$  とするとき、次の積分の値を求めよ。

(1)  $\int_C \frac{z^2}{z-3} dz$                       (2)  $\int_C \frac{4e^z}{z-2} dz$