日 付	学 科	学 年	番 号	名 前

第4章 2 「複素関数」「正則関数」「コーシー・リーマンの関係式」 第1回

1. 次の値を求めよ．

(1) $e^{2\pi i}$　　(2) $e^{1+\pi i}$　　(3) e^{i}

2. 次の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{z\to 1+i}(z+\overline{z})$　　(2) $\displaystyle\lim_{z\to 2+i}\frac{z^2}{z-2}$　　(3) $\displaystyle\lim_{z\to -i}\frac{z^2+1}{z+i}$

3. 次の関数を微分せよ．

(1) $w=z^3+z+1$　　(2) $w=(z^2+1)(z-i)$　　(3) $w=\dfrac{z}{z-i}$

4. 次の関数について，$w=u+vi$, $z=x+yi$ とおくとき，u, v は x, y のどんな関数か．

(1) $w=\overline{z}-2$　　(2) $w=(z-1)^2$

例題 次の関数は正則か．もし正則ならば，導関数を求めよ．

(1) $f(z)=(x+y)+(x-y)i$　　(2) $f(z)=(x^2-y^2)+(2xy-1)i$

解 関数の正則性を判定するため教科書 p.118 コーシー・リーマンの関係式を用いる．

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \text{ が正則} \iff u_x=v_y \text{ かつ } u_y=-v_x$$

このとき，$f'(z)=u_x+iv_x=v_y-iu_y$ である．

(1) 与えられた関数から $u=x+y$, $v=x-y$ と考える．$u_x=1$, $v_y=-1$ より，$u_x\neq v_y$ である．コーシー・リーマンの関係式を満たさないため，$f(z)$ は正則でない．

(2) 与えられた関数から $u=x^2-y^2$, $v=2xy-1$ と考える．$u_x=2x=v_y$ と $u_y=-2y=-v_x$ であり，コーシー・リーマンの関係式を満たすため，$f(z)$ は正則である．導関数は $f'(z)=2x+2yi$ となる．

[注意] (2) において，$z=x+yi$ を用いて，$f'(z)=2(x+yi)=2z$ と答えることもできる．

5. 次の関数は正則か．もし正則ならば，導関数を求めよ．

(1) $f(z)=3(x+y)+(2x-y)i$　　(2) $f(z)=-y+xi$