日　付	学　科	学　年	番　　号	名　　前
／				

第２章 4 「微分方程式への応用（その２）」 第１回

例題 次の微分方程式を与えられた境界条件の下で解け.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0,\ x(0) = 0,\ x(1) = e^2$$

解 $x'(0) = \alpha$ とおき，$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - x(0)s - x'(0) = s^2X(s) - \alpha,\ \mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s)$$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると　$s^2X(s) - \alpha - 4sX(s) + 4X(s) = 0$

整理すると　$X(s) = \dfrac{\alpha}{s^2 - 4s + 4} = \dfrac{\alpha}{(s-2)^2}$　　$\therefore\ x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \alpha te^{2t}$

$x(1) = e^2$ から　$\alpha e^2 = e^2$　すなわち　$\alpha = 1$

したがって，求める解は　$x(t) = te^{2t}$

1. 次の微分方程式を与えられた境界条件の下で解け.

(1) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 4\dfrac{dx}{dt} + 5x = 0,\ x(0) = 0,\ x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{\pi}$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + x = 1,\ x(0) = 0,\ x\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$