日　付	学　科	学　年	番　　号	名　　前
／				

第 2 章 3 「微分方程式への応用（その 1）」 第 1 回

例題 次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dx}{dt} + 2x = 4t,\ x(0) = 0$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} + x = e^{-2t}$　$\left(t = 0 \text{ のとき } x = 0,\ \dfrac{dx}{dt} = 0\right)$

解 (1) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると　$\mathcal{L}\left[\dfrac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s)$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると　$sX(s) + 2X(s) = \dfrac{4}{s^2}$

整理して部分分数に分解すると　$X(s) = \dfrac{4}{s^2(s+2)} = \dfrac{-1}{s} + \dfrac{2}{s^2} + \dfrac{1}{s+2}$

したがって　$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = -1 + 2t + e^{-2t}$

(2) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると　$\mathcal{L}\left[\dfrac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - x(0)s - x'(0) = s^2X(s),\ \mathcal{L}\left[\dfrac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s)$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると　$s^2X(s) - 2sX(s) + X(s) = \dfrac{1}{s+2}$

整理して部分分数に分解すると　$X(s) = \dfrac{1}{(s-1)^2(s+2)} = -\dfrac{1}{9}\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{(s-1)^2} + \dfrac{1}{9}\dfrac{1}{s+2}$

したがって　$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = -\dfrac{1}{9}e^t + \dfrac{1}{3}te^t + \dfrac{1}{9}e^{-2t} = \dfrac{1}{9}(-1+3t)e^t + \dfrac{1}{9}e^{-2t}$

1. 次の微分方程式を解け.

(1) $\dfrac{dx}{dt} + 3x = t,\ x(0) = 1$

(2) $\dfrac{dx}{dt} - 2x = 3\sin 2t,\ x(0) = 0$

2. 次の微分方程式を解け.

$\dfrac{d^2x}{dt^2} - 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = e^{3t}$　$\left(t = 0 \text{ のとき } x = 0,\ \dfrac{dx}{dt} = 0\right)$