日 付	学 科	学 年	番 号	名 前
／				

第2章 2 「逆ラプラス変換」 第2回

1. 教科書 p.195 ラプラス変換表および p.196 ラプラス変換の性質を用いて，次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．

(1) $\dfrac{2}{s^2}+\dfrac{1}{s^4}$　　(2) $\dfrac{2}{(s+1)^3}$　　(3) $\dfrac{3}{s^2+9}$　　(4) $\dfrac{s-1}{(s-1)^2+4}$

例題 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．

(1) $\dfrac{s+1}{(s-1)^2}$　　(2) $\dfrac{5s^2-4}{s^2(s+2)}$

解 分母に同じ因数が複数個ある分数式は $\dfrac{F(s)}{(s-\alpha)^n}=\dfrac{A_1}{s-\alpha}+\dfrac{A_2}{(s-\alpha)^2}+\cdots+\dfrac{A_n}{(s-\alpha)^n}$ と部分分数に分解する．

(1) $\dfrac{s+1}{(s-1)^2}=\dfrac{A}{s-1}+\dfrac{B}{(s-1)^2}$ と部分分数に分解する．

両辺に $(s-1)^2$ を掛けると　$s+1=A(s-1)+B$

右辺を整理すると　$s+1=As+(-A+B)$

これが恒等式になればよいから，係数を比較して　$A=1,\ -A+B=1$

これを解いて　$A=1,\ B=2$　　$\therefore\ \dfrac{s+1}{(s-1)^2}=\dfrac{1}{s-1}+\dfrac{2}{(s-1)^2}$

したがって　$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{s+1}{(s-1)^2}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-1}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{(s-1)^2}\right]=e^t+2te^t=(1+2t)e^t$

(2) $\dfrac{5s^2-4}{s^2(s+2)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s^2}+\dfrac{C}{s+2}$ と部分分数に分解する．

両辺に $s^2(s+2)$ を掛けると　$5s^2-4=As(s+2)+B(s+2)+Cs^2$

右辺を整理すると　$5s^2-4=(A+C)s^2+(2A+B)s+2B$

これが恒等式になればよいから，係数を比較して　$A+C=5,\ 2A+B=0,\ 2B=-4$

これを解いて　$A=1,\ B=-2,\ C=4$　　$\therefore\ \dfrac{5s^2-4}{s^2(s+2)}=\dfrac{1}{s}+\dfrac{-2}{s^2}+\dfrac{4}{s+2}$

したがって　$\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{5s^2-4}{s^2(s+2)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{-2}{s^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{4}{s+2}\right]=1-2t+4e^{-2t}$

2. 次の関数の逆ラプラス変換を求めよ．

(1) $\dfrac{s+2}{(s-2)^2}$　　(2) $\dfrac{2s^2+5s+1}{(s+1)^2(s+2)}$