日　付	学　科	学　年	番　　号	名　　前

第2章 1 「ラプラス変換」 第1回

例題 関数 $f(t)=e^{t}$ のラプラス変換を定義に従って求めよ.

解 $F(s)=\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-st}e^{t}\,dt=\int_0^{\infty} e^{-(s-1)t}\,dt=\Big[-\frac{1}{s-1}e^{-(s-1)t}\Big]_0^{\infty}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-1}\lim_{t\to\infty}e^{-(s-1)t}$

$s-1>0$ のとき, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}e^{-(s-1)t}=0$ だから $F(s)=\frac{1}{s-1}$

$s-1\leqq 0$ のとき, $\displaystyle\int_0^{\infty}e^{-(s-1)t}\,dt$ は存在しない. したがって, $\mathcal{L}[e^{t}]=\frac{1}{s-1}\quad(s>1)$

1. 関数 $f(t)=e^{-3t}$ のラプラス変換を定義に従って求めよ.

2. 教科書 p.195 ラプラス変換表および p.196 ラプラス変換の性質を用いて，次の関数のラプラス変換を求めよ.

(1) $3t+2$　　(2) $(t+1)e^{5t}$　　(3) $3\sin 2t$

(4) $e^{-t}\cos 2t$　　(5) $t\cos t$　　(6) $\sinh 3t$

(7) $\displaystyle\int_0^{t}\cos\tau\,d\tau$　　(8) $\dfrac{\sin t}{t}$　　(9) $t*e^{2t}$

3. 次の関数を単位ステップ関数 $U(t-a)=\begin{cases}1 & (t\geqq a)\\ 0 & (t<a)\end{cases}$ (a は定数) を用いて表し，そのラプラス変換を求めよ.

(1) $f(t)=\begin{cases}1 & (t\geqq 1)\\ 0 & (t<1)\end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases}0 & (0<t<1,\ t\geqq 2)\\ 1 & (1\leqq t<2)\end{cases}$