日　付	学　科	学　年	番　　号	名　　前
／				

第1章 6 「ガウスの発散定理」 第2回

1. 平面 $x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 0,\ z = 3$ で囲まれる立体 V の表面を S とするとき，ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (4x + 3z,\ 2xy,\ 2z^2)$ の S 上の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ の値を求めよ．ただし，S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，S の外側を向くものとする．

2. 原点 O と 3 点 $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 3)$ を頂点とする三角錐 V の表面を S とするとき，ベクトル場 $\boldsymbol{a} = \Big(2x(1-2y),\ 2y - 3y^2,\ 10yz\Big)$ の S 上の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ の値を求めよ．ただし，S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，S の外側を向くものとする．

例題 原点 O を中心とする半径 1 の球面を S とし，球面 S に囲まれた立体の体積を V とする．このとき，ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (3x,\, 2y,\, y + 5z)$ の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ の値をガウスの発散定理を用いて求めよ．ただし，S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，S の外側を向くものとする．

解 ガウスの発散定理より　$\displaystyle\int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{a}\, dV$

ここで　$\displaystyle\nabla \cdot \boldsymbol{a} = \frac{\partial}{\partial x}(3x) + \frac{\partial}{\partial y}(2y) + \frac{\partial}{\partial z}(y + 5z) = 3 + 2 + 5 = 10$

したがって　$\displaystyle\int_V \nabla \cdot \boldsymbol{a}\, dV = \int_V 10\, dV = 10 \times (V \text{ の体積}) = 10 \times \left(\frac{4}{3}\pi \times 1^3\right) = \frac{40}{3}\pi$

3. 原点 O を中心とする半径 2 の球面を S とし，球面 S に囲まれた立体の体積を V とする．このとき，ベクトル場 $\boldsymbol{a} = (x - y,\, x + y,\, z)$ の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ の値をガウスの発散定理を用いて求めよ．ただし，S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，S の外側を向くものとする．