日　付	学　科	学　年	番　　号	名　　前

第１章６「ガウスの発散定理」 第１回

例題 平面 $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=2,\ z=0,\ z=4$ で囲まれる立体 V の表面を S とするとき，ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(xz,\ x+2y,\ yz)$ の S 上の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ の値を求めよ．ただし，S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，S の外側を向くものとする．

解 ガウスの発散定理より $\displaystyle\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV$

ここで　$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\dfrac{\partial}{\partial x}(xz)+\dfrac{\partial}{\partial y}(x+2y)+\dfrac{\partial}{\partial z}(yz)=z+2+y$

$$\begin{aligned}\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV=\int_V (z+2+y)\,dV &= \int_0^1\left\{\int_0^2\left(\int_0^4 (z+2+y)\,dz\right)dy\right\}dx\\ &= \int_0^1\left\{\int_0^2\left[\frac{z^2}{2}+2z+yz\right]_0^4 dy\right\}dx\\ &= \int_0^1\left\{\int_0^2 (16+4y)\ dy\right\}dx=40\end{aligned}$$

1. 平面 $x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=1,\ z=0,\ z=2$ で囲まれる立体 V の表面を S とするとき，ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(xz^3,\ 2x+3y,\ 4yz)$ の S 上の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ の値を求めよ．ただし，S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，S の外側を向くものとする．

例題 原点 O と 3 点 $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする三角錐 V の表面を S とするとき，ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(x-2xz,\ y-2yz,\ 2z^2-xy)$ の S 上の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ の値を求めよ．ただし，S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，S の外側を向くものとする．

解 ガウスの発散定理より

$$\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\frac{\partial}{\partial x}(x-2xz)+\frac{\partial}{\partial y}(y-2yz)+\frac{\partial}{\partial z}(2z^2-xy)=(1-2z)+(1-2z)+(4z)=2$$

したがって　$\displaystyle\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{a}\,dV=\int_V 2\,dV=2\int_V dV=2\times(V\text{ の体積})=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

2. 原点 O と 3 点 $(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 2)$ を頂点とする三角錐 V の表面を S とするとき，ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(3x-4xz,\ 3y-4yz,\ 4z^2+x^2y^2)$ の S 上の面積分 $\displaystyle\int_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ の値を求めよ．ただし，S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，S の外側を向くものとする．