日付	学科	学年	番号	名前
／				

第1章 5 「グリーンの定理」「ストークスの定理」 第3回

1. 曲線 $y=x,\ y=x^2$ で囲まれた xy 平面上の領域 D の周を C とする．このとき，次の線積分を 2 重積分に直してその値を求めよ．

$$\int_C \left\{(xy+1)\,dx+(x^2+y^2)\,dy\right\}$$

2. xy 平面上において，$0 \leqq x \leqq 1,\ y \geqq 0,\ y^2 \leqq x$ で表される領域 D の境界を C とする．このとき，線積分 $\displaystyle\int_C \left\{(x^2-2xy)\,dx+(x^2y+3)\,dy\right\}$ の値をグリーンの定理を用いて求めよ．

例題 原点 O と 2 点 $(1,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ 0)$ を順に結んで O にもどる三角形の周を C とする．このとき，ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(x^2+y,\ x^2+2z,\ 2y)$ について，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$ の値をストークスの定理を用いて求めよ．

解 C で囲まれた領域を S とし，S の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする．ストークスの定理より

$$I=\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_S (\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\,dS$$

ここで，$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}=(0,\ 0,\ 1)$ だから $(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}=(0,\ 0,\ 2x-1)\cdot\boldsymbol{k}=2x-1$

また，領域 S は $0 \leqq x \leqq 1,\ \ 0 \leqq y \leqq x$ と表されるから

$$I=\int_0^1\left\{\int_0^x (2x-1)dy\right\}dx=\int_0^1 (2x-1)\,x\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}$$

3. 原点 O と 2 点 $(2,\ 0,\ 0),\ (2,\ 2,\ 0)$ を順に結んで O にもどる三角形の周を C とする．このとき，ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(x-4y,\ 3y+z^2,\ 4xy)$ について，線積分 $\displaystyle\int_C \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}$ の値をストークスの定理を用いて求めよ．