日　付	学　科	学　年	番　　号	名　　前
／				

第１章５「グリーンの定理」「ストークスの定理」 第１回

例題 C を xy 平面上の原点 O と 2 点 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$ を順に結んでできる三角形の周とする．このとき，次の線積分を 2 重積分に直してその値を求めよ．

$$\int_C \left\{(xy+y^2)\,dx+(8x^2-4xy)\,dy\right\}$$

解 三角形の周 C によって囲まれた範囲を D とする．C の向きは，D を左側に見ながら 1 周する向きとする．
グリーンの定理より

$$\int_C \left\{(xy+y^2)\,dx+(8x^2-4xy)\,dy\right\}=\iint_D\left(\frac{\partial(8x^2-4xy)}{\partial x}-\frac{\partial(xy+y^2)}{\partial y}\right)dx\,dy$$
$$=\iint_D (15x-6y)\ dx\,dy=\int_0^1\left\{\int_0^{-x+1}(15x-6y)\,dy\right\}dx=\frac{3}{2}$$

1. C を xy 平面上の原点 O と 2 点 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$ を順に結んでできる三角形の周とする．このとき，次の線積分を 2 重積分に直してその値を求めよ．

$$\int_C \left\{(-4xy-5y^2+x)\,dx+(-4x^2+6xy+3)\,dy\right\}$$

例題 S を半球面 $x^2+y^2+z^2=4\ (z\geqq 0)$ とし，S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は球面から外向きとする．S の境界を $C:\boldsymbol{r}(t)=(2\cos t,\ 2\sin t,\ 0)\ (0\leqq t\leqq 2\pi)$ とするとき，ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(x+z,\ x+y,\ z^2)$ について，$\displaystyle\int_S(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ．

解 C 上で $\boldsymbol{a}=\Big(2\cos t,\ 2(\cos t+\sin t),\ 0\Big)$，$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)$
ストークスの定理より

$$\int_S(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\int_C\boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_0^{2\pi}\boldsymbol{a}(t)\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt=\int_0^{2\pi}\Big(2\cos t,\ 2(\cos t+\sin t),\ 0\Big)\cdot(-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)\,dt$$
$$=4\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=2\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt=2\Big[t+\frac{1}{2}\sin 2t\Big]_0^{2\pi}=4\pi$$

2. S を曲面 $z=4-x^2-y^2\ (z\geqq 0)$ とし，S の単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは，その z 成分が正であるものが外向きであるように定める．S の境界を $C:\boldsymbol{r}(t)=(2\cos t,\ 2\sin t,\ 0)\ (0\leqq t\leqq 2\pi)$ とするとき，ベクトル場 $\boldsymbol{a}=(-y,\ x^2,\ 3xz)$ について，$\displaystyle\int_S(\nabla\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ を求めよ．