日 付	学 科	学 年	番 号	名 前

第１章 3 「勾配」「発散」「回転」 第２回

例題 スカラー場 $\varphi = xyz^3 + 6x^2y$ と点 $\mathrm{P}(-1,\ 1,\ 0)$ について，点 P における方向微分係数 $(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{n}$ が最大となる単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ．

解 $\nabla\varphi = \left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y},\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = (yz^3 + 12xy,\ xz^3 + 6x^2,\ 3xyz^2)$ より $(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}} = (-12,\ 6,\ 0)$

$(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{n}$ が最大となる単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ の向きは $(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}$ と同じだから，$(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}$ をその大きさ $|(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}|$ で割ることで単位ベクトルにすればよい．

$|(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}| = \sqrt{(-12)^2 + 6^2 + 0^2} = 6\sqrt{5}$ より $\boldsymbol{n} = \dfrac{1}{|(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}}|}(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}} = \dfrac{1}{6\sqrt{5}}(-12,\ 6,\ 0) = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{1}{\sqrt{5}},\ 0\right)$

1. スカラー場 $\varphi = 2x^2 - 3y^2 + 5z^2$ と点 $\mathrm{P}(2,\ 0,\ -1)$ について，点 P における方向微分係数 $(\nabla\varphi)_{\mathrm{P}} \cdot \boldsymbol{n}$ が最大となる単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めよ．

2. 次のベクトル場の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{a}$，$\nabla \cdot \boldsymbol{b}$ と回転 $\nabla \times \boldsymbol{a}$，$\nabla \times \boldsymbol{b}$ をそれぞれ求めよ．

(1) $\boldsymbol{a} = (xyz,\ 0,\ 0)$　　(2) $\boldsymbol{b} = (e^x,\ z,\ -e^{-z})$

3. $\boldsymbol{a} = (x^2y,\ -2xz,\ yz^2)$ のとき，次を求めよ．

(1) $\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a})$　　(2) $\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a})$　　(3) $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{a})$

4. スカラー場 $\varphi = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ について，$\nabla^2\varphi$ を求めよ．