

日付	学科	学年	番号	名前
/				

第1章 3 「勾配」「発散」「回転」 第1回

例題 スカラー場 $\varphi = xyz^3 + 6x^2y$ と点 $P(-1, 1, 0)$ について、次を求めよ。

(1) φ の勾配 $\nabla\varphi$ および $(\nabla\varphi)_P$

(2) 点 P における $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ の方向への方向微分係数

解 (1) $\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) = (yz^3 + 12xy, xz^3 + 6x^2, 3xyz^2)$

$\nabla\varphi$ に点 P の座標値を代入して $(\nabla\varphi)_P = (-12, 6, 0)$

(2) $(\nabla\varphi)_P \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = (-12, 6, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = -\frac{12}{\sqrt{3}} + \frac{6}{\sqrt{3}} + 0 = -\frac{6}{\sqrt{3}} = -2\sqrt{3}$

1. スカラー場 $\varphi = 2x^2 - 3y^2 + 5z^2$ と点 $P(2, 0, -1)$ について、次を求めよ。

(1) φ の勾配 $\nabla\varphi$ および $(\nabla\varphi)_P$

(2) 点 P における $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ の方向への方向微分係数

2. 次のベクトル場の発散 $\nabla \cdot \mathbf{a}$, $\nabla \cdot \mathbf{b}$ と回転 $\nabla \times \mathbf{a}$, $\nabla \times \mathbf{b}$ をそれぞれ求めよ。

(1) $\mathbf{a} = (x^2y^2, -4xyz^2, x^3y + xy^3)$

(2) $\mathbf{b} = (e^x, -z^2, -e^{-y})$

3. $\mathbf{a} = (x^2y, 2x^2z^2, y^2z^3)$ のとき、次を求めよ。

(1) $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{a})$

(2) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a})$

(3) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a})$

4. スカラー場 $\varphi = x^2y^2z^2 + x^2y + y^2z + z^2x$ について、 $\nabla^2\varphi$ を求めよ。