

日付	学科	学年	番号	名前
/				

第1章 2 「曲線」「曲面」 第1回

例題 曲線 $\mathbf{r} = (3 \cos t, 3 \sin t, \sqrt{7}t)$ について、単位接線ベクトル \mathbf{t} , $t = 0$ から $t = 2$ までの曲線の長さ s をそれぞれ求めよ。

解 $\mathbf{r}' = (-3 \sin t, 3 \cos t, \sqrt{7})$, $|\mathbf{r}'| = \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2 + (\sqrt{7})^2} = \sqrt{16} = 4$

単位接線ベクトル $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \left(-\frac{3}{4} \sin t, \frac{3}{4} \cos t, \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$, 曲線の長さ $s = \int_0^2 \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int_0^2 4 dt = 8$

1. 曲線 $\mathbf{r} = (4 \sin t, 4 \cos t, 12t)$ について、単位接線ベクトル \mathbf{t} , $t = 1$ から $t = 2$ までの曲線の長さ s をそれぞれ求めよ。

例題 ベクトル関数

$$\mathbf{r} = (\cos u, \sin u, v) \quad (D : 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq 2)$$

で表される曲面 \mathbf{r} について、次を求めよ。

(1) $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ (2) $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|$ (3) 単位法線ベクトル \mathbf{n} (4) 曲面の面積 S

解 (1) $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (-\sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1)$

$$= (\cos u \cdot 1 - 0 \cdot 0, 0 \cdot 0 - (-\sin u) \cdot 1, -\sin u \cdot 0 - \cos u \cdot 0) = (\cos u, \sin u, 0)$$

(2) $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{\cos^2 u + \sin^2 u + 0^2} = 1$ (3) $\mathbf{n} = \pm \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|} = (\pm \cos u, \pm \sin u, 0)$ (複号同順)

(4) $S = \iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du dv = \iint_D 1 du dv = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^2 dv \right\} du = 4\pi$

2. ベクトル関数

$$\mathbf{r} = (\cos u, \sin u, v^2) \quad (D : 0 \leq u \leq 2\pi, 1 \leq v \leq 2)$$

で表される曲面について、次を求めよ。

(1) $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ (2) $\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|$ (3) 単位法線ベクトル \mathbf{n} (4) 曲面の面積 S