第4章 6 「留数と留数定理」 第3回

解答

1. (1) $\mathrm{Res}[f,\ i]=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$, $\mathrm{Res}[f,\ -1]=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$　　(2) $\mathrm{Res}[f,\ \pi]=\dfrac{1}{2}$

2. (1) $4\pi i$　　(2) πi　　(3) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{3}\right)\pi$

解説

1. 教科書 p.143 の留数の計算を用いよ.

(1) 孤立特異点は $i,\ -1$ である.

$$\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\lim_{z\to i}(z-i)\cdot\frac{2z+i}{(z-i)(z+1)}=\lim_{z\to i}\frac{2z+i}{z+1}=\frac{3i}{i+1}=\frac{3i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i\fallingdotseq 0$$

よって，i は 1 位の極であり，$\mathrm{Res}[f,\ i]=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}i$ を得る．また

$$\lim_{z\to -1}(z+1)f(z)=\lim_{z\to -1}(z+1)\cdot\frac{2z+i}{(z-i)(z+1)}=\lim_{z\to -1}\frac{2z+i}{z-i}=\frac{-2+i}{-1-i}\cdot\frac{-1+i}{-1+i}=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\fallingdotseq 0$$

よって，-1 は 1 位の極であり，$\mathrm{Res}[f,\ -1]=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}i$ を得る.

(2) 孤立特異点は π である.

$$\lim_{z\to\pi}(z-\pi)^3f(z)=\lim_{z\to\pi}(z-\pi)^3\cdot\frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}=\lim_{z\to\pi}e^{iz}=e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1\fallingdotseq 0$$

よって，π は 3 位の極である.

$$\mathrm{Res}[f,\ \pi]=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to\pi}\frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}\{(z-\pi)^3f(z)\}=\frac{1}{2!}\lim_{z\to\pi}\frac{d^2}{dz^2}(e^{iz})=\frac{1}{2\cdot 1}\lim_{z\to\pi}(i^2e^{iz})=\frac{1}{2}(-e^{i\pi})=\frac{1}{2}$$

2. 教科書 p.144 の留数定理を用いよ.

(1) $f(z)=\dfrac{2z+i}{(z-i)(z+1)}$ とおく．$f(z)$ の C の内部にある孤立特異点は $i,\ -1$ であり，この点における留数は前問 (1) で求めた．留数定理より

$$\int_C\frac{2z+i}{(z-i)(z+1)}\,dz=2\pi i\big(\mathrm{Res}[f,\ i]+\mathrm{Res}[f,\ -1]\big)=2\pi i\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)=4\pi i$$

(2) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}$ とおく．$f(z)$ の C の内部にある孤立特異点は π であり，この点における留数は前問 (2) で求めた．留数定理より

$$\int_C\frac{e^{iz}}{(z-\pi)^3}\,dz=2\pi i\big(\mathrm{Res}[f,\ \pi]\big)=2\pi i\left(\frac{1}{2}\right)=\pi i$$

(3) $f(z)=\dfrac{z+2}{z(z+i)(z-3i)}$ とおく．C の内部にある孤立特異点は $0,\ -i$ である.

$$\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}z\cdot\frac{z+2}{z(z+i)(z-3i)}=\lim_{z\to 0}\frac{z+2}{(z+i)(z-3i)}=\frac{2}{3}\fallingdotseq 0$$

よって，0 は 1 位の極であり，$\mathrm{Res}[f,\ 0]=\dfrac{2}{3}$ を得る．また

$$\lim_{z\to -i}(z+i)f(z)=\lim_{z\to -i}(z+i)\cdot\frac{z+2}{z(z+i)(z-3i)}=\lim_{z\to -i}\frac{z+2}{z(z-3i)}=-\frac{1}{2}+\frac{i}{4}\fallingdotseq 0$$

よって，$-i$ は 1 位の極であり，$\mathrm{Res}[f,\ -i]=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{i}{4}$ を得る.

C の内部にある孤立特異点が $0,-i$ であることに注意する．留数定理より

$$\int_C\frac{z+2}{z(z+i)(z-3i)}\,dz=2\pi i\big(\mathrm{Res}[f,\ 0]+\mathrm{Res}[f,\ -i]\big)=2\pi i\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{i}{4}\right)=2\pi i\left(\frac{1}{6}+\frac{i}{4}\right)=\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{3}\right)\pi$$