# 第4章 6 「留数と留数定理」 第2回

### 解答

**1.** (1) $\mathrm{Res}[f,\ 2] = \dfrac{3}{4},\ \mathrm{Res}[f,\ -2] = \dfrac{1}{4}$ (2) $\mathrm{Res}[f,\ 0] = -4,\ \mathrm{Res}[f,\ -1] = 7$

**2.** (1) $2\pi i$ (2) $6\pi i$ (3) $6\pi i$

### 解説

**1.** 教科書 p.143 の留数の計算を用いよ.

(1) 孤立特異点は $2,\ -2$ である.

$$\lim_{z\to 2}(z-2)f(z) = \lim_{z\to 2}(z-2)\cdot\frac{z+1}{(z-2)(z+2)} = \lim_{z\to 2}\frac{z+1}{z+2} = \frac{3}{4} \neq 0$$

よって，2 は 1 位の極であり，$\mathrm{Res}[f,\ 2] = \dfrac{3}{4}$ を得る．また

$$\lim_{z\to -2}(z+2)f(z) = \lim_{z\to -2}(z+2)\cdot\frac{z+1}{(z-2)(z+2)} = \lim_{z\to -2}\frac{z+1}{z-2} = \frac{1}{4} \neq 0$$

よって，$-2$ は 1 位の極であり，$\mathrm{Res}[f,\ -2] = \dfrac{1}{4}$ を得る.

(2) 孤立特異点は $0,\ -1$ である.

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} z^2\cdot\frac{3z^2+4}{z^2(z+1)} = \lim_{z\to 0}\frac{3z+4}{z+1} = 4 \neq 0$$

よって，0 は 2 位の極である．したがって

$$\mathrm{Res}[f,\ 0] = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\{z^2 f(z)\} = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\Big(\frac{3z^2+4}{z+1}\Big) = \lim_{z\to 0}\frac{6z\cdot(z+1)-(3z^2+4)\cdot 1}{(z+1)^2} = -4$$

を得る．また

$$\lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1}(z+1)\cdot\frac{3z^2+4}{z^2(z+1)} = \lim_{z\to -1}\frac{3z^2+4}{z^2} = 7 \neq 0$$

よって，$-1$ は 1 位の極であり，$\mathrm{Res}[f,\ -1] = 7$ を得る.

**2.** 教科書 p.144 の留数定理を用いよ.

(1) $f(z) = \dfrac{z+1}{(z-2)(z+2)}$ とおく．$f(z)$ の $C$ の内部にある孤立特異点は $2,\ -2$ であり，この点における留数は前問 (1) で求めた．留数定理より

$$\int_C \frac{z+1}{(z-2)(z+2)}\,dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}[f,\ 2] + \mathrm{Res}[f,\ -2]\big) = 2\pi i\Big(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\Big) = 2\pi i$$

(2) $f(z) = \dfrac{3z+4}{z^2(z+1)}$ とおく．$f(z)$ の $C$ の内部にある孤立特異点は $0,\ -1$ であり，この点における留数は前問 (2) で求めた．留数定理より

$$\int_C \frac{3z+4}{z^2(z+1)}\,dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}[f,\ 0] + \mathrm{Res}[f,\ -1]\big) = 2\pi i(-4+7) = 6\pi i$$

(3) $f(z) = \dfrac{3z-2}{z^2-3z} = \dfrac{3z-2}{z(z-3)}$ とおく．孤立特異点は $0,\ 3$ である.

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} z\cdot\frac{3z-2}{z(z-3)} = \lim_{z\to 0}\frac{3z-2}{z-3} = \frac{2}{3} \neq 0$$

よって，0 は 1 位の極であり，$\mathrm{Res}[f,\ 0] = \dfrac{2}{3}$ を得る．また

$$\lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = \lim_{z\to 3}(z-3)\cdot\frac{3z-2}{z(z-3)} = \lim_{z\to 3}\frac{3z-2}{z} = \frac{7}{3} \neq 0$$

よって，3 は 1 位の極であり，$\mathrm{Res}[f,\ 3] = \dfrac{7}{3}$ を得る．$C$ の内部にある孤立特異点は $0, 3$ である．留数定理より

$$\int_C \frac{3z-2}{z^2-3z}\,dz = 2\pi i\big(\mathrm{Res}[f,\ 0] + \mathrm{Res}[f,\ 3]\big) = 2\pi i\Big(\frac{2}{3}+\frac{7}{3}\Big) = 6\pi i$$