第 4 章 6 「留数と留数定理」 第 1 回

解答

1. (1) $\mathrm{Res}[f,\ 1]=\dfrac{e}{25}$ (2) $\mathrm{Res}[f,\ -4]=-\dfrac{6}{25e^4}$

2. $\dfrac{2\pi}{25}\left(e-\dfrac{6}{e^4}\right)i$

解説

1. 教科書 p.143 の留数の計算を用いよ．

(1) $\displaystyle\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{e^z}{(z-1)(z+4)^2}=\lim_{z\to 1}\frac{e^z}{(z+4)^2}=\frac{e}{25}\neq 0$

よって，1 は 1 位の極である． $\therefore\ \ \mathrm{Res}[f,\ 1]=\dfrac{e}{25}$

(2) $\displaystyle\lim_{z\to -4}(z+4)^2f(z)=\lim_{z\to -4}(z+4)^2\cdot\frac{e^z}{(z-1)(z+4)^2}=\lim_{z\to -4}\frac{e^z}{z-1}=-\frac{1}{5e^4}\neq 0$

よって，-4 は 2 位の極である．したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f,\ -4]&=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to -4}\frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left\{(z+4)^2\cdot\frac{e^z}{(z-1)(z+4)^2}\right\}\\&=\lim_{z\to -4}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^z}{z-1}\right)\\&=\lim_{z\to -4}\frac{(e^z)'\cdot(z-1)-e^z\cdot(z-1)'}{(z-1)^2}\\&=\lim_{z\to -4}\frac{ze^z-2e^z}{(z-1)^2}\\&=-\frac{6}{25e^4}\end{aligned}$$

2. $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-1)(z+4)^2}$ とおく．$f(z)$ の C の内部にある孤立特異点は $1,\ -4$ であり，この点における留数は前問で求めた通り $\mathrm{Res}[f,\ 1]=\dfrac{e}{25}$, $\mathrm{Res}[f,\ -4]=-\dfrac{6}{25e^4}$ である．教科書 p.144 の留数定理より

$$\int_C\frac{e^z}{(z-1)(z+4)^2}\,dz=2\pi i\big(\mathrm{Res}[f,\ 1]+\mathrm{Res}[f,\ -4]\big)=2\pi i\left(\frac{e}{25}-\frac{6}{25e^4}\right)=\frac{2\pi}{25}\left(e-\frac{6}{e^4}\right)i$$