

第4章 5 「関数の展開」 第3回

解答

1. (1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(z-2) + \frac{1}{8}(z-2)^2 + \frac{1}{16}(z-2)^3 + \dots$
 $(|z-2| < 2)$

(2) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(z-2) + \frac{3}{16}(z-2)^2 + \frac{1}{8}(z-2)^3 + \dots$
 $(|z-2| < 2)$

2. 孤立特異点 -1 を中心とするローラン展開:

$$\frac{1}{z+1} - 1 + (z+1) - (z+1)^2 + \dots \quad (0 < |z+1| < 1)$$

孤立特異点 -2 を中心とするローラン展開:

$$-\frac{1}{z+2} - 1 - (z+2) - (z+2)^2 - \dots \quad (0 < |z+2| < 1)$$

解説

1. (1) $f(z)$ を変形して

$$f(z) = \frac{1}{4-z} = \frac{1}{2-(z-2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-2}{2}}$$

を得る. $Z = \frac{z-2}{2}$ とおくと

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-Z} \\ &= \frac{1}{2}(1+Z+Z^2+Z^3+\dots) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{z-2}{2}\right) + \left(\frac{z-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-2}{2}\right)^3 + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(z-2) + \frac{1}{8}(z-2)^2 + \frac{1}{16}(z-2)^3 + \dots \end{aligned}$$

z の範囲は $|Z| < 1$ より, $|z-2| < 2$ となる.

(2) (1) で求めたテイラー級数の両辺を微分して

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{(4-z)^2} \\ &= f'(z) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{2}{8}(z-2)^1 + \frac{3}{16}(z-2)^2 + \frac{4}{32}(z-2)^3 + \dots \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(z-2) + \frac{3}{16}(z-2)^2 + \frac{1}{8}(z-2)^3 + \dots \\ &\quad (|z-2| < 2) \end{aligned}$$

2. 分母を因数分解する.

$$g(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)}$$

より, 孤立特異点は -1 と -2 である.

(i) 孤立特異点 -1 を中心とするローラン展開:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{1-\{-(z+1)\}}$$

より, $Z = -(z+1)$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+2} &= \frac{1}{1-Z} \\ &= 1+Z+Z^2+Z^3+\dots \\ &= 1-(z+1)+(z+1)^2-(z+1)^3+\dots \\ &\quad (|z+1| < 1) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{z+2} \\ &= \frac{1}{z+1} \{1-(z+1)+(z+1)^2-(z+1)^3+\dots\} \\ &= \frac{1}{z+1} - 1 + (z+1) - (z+1)^2 + \dots \\ &\quad (0 < |z+1| < 1) \end{aligned}$$

(ii) 孤立特異点 -2 を中心とするローラン展開:

$$\frac{1}{z+1} = -\frac{1}{1-(z+2)}$$

より, $Z = z+2$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+1} &= -\frac{1}{1-Z} \\ &= -1-Z-Z^2-Z^3-\dots \\ &= -1-(z+2)-(z+2)^2-(z+2)^3-\dots \\ &\quad (|z+2| < 1) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{z+2} \\ &= \{-1-(z+2)-(z+2)^2-(z+2)^3-\dots\} \frac{1}{z+2} \\ &= -\frac{1}{z+2} - 1 - (z+2) - (z+2)^2 - \dots \\ &\quad (0 < |z+2| < 1) \end{aligned}$$