

第4章 5 「関数の展開」 第2回

解答

1. (1) $\frac{1}{3} + \frac{z}{9} + \frac{z^2}{27} + \frac{z^3}{81} + \dots$ ($|z| < 3$)
 (2) $1 + (z-2) + (z-2)^2 + (z-2)^3 + \dots$ ($|z-2| < 1$)
 (3) $1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots$ ($|z| < 1$)
2. (1) $\frac{1}{z-1} - 1 + (z-1) - (z-1)^2 + \dots$
 ($0 < |z-1| < 1$)
 (2) $-\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1 - z - \dots$ ($0 < |z| < 1$)
 (3) $\frac{1}{(z-4)^2} - \frac{1}{(z-4)} + 1 - (z-4) + \dots$
 ($0 < |z-4| < 1$)

解説

1. (1) $f(z)$ を変形して

$$f(z) = \frac{1}{3-z} = \frac{1}{3\left(1-\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}}$$

を得る. $Z = \frac{z}{3}$ とおき

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-Z} \\ &= \frac{1}{3}(1 + Z + Z^2 + Z^3 + \dots) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{z}{3^2} + \frac{z^2}{3^3} + \frac{z^3}{3^4} + \dots \\ &= \frac{1}{3} + \frac{z}{9} + \frac{z^2}{27} + \frac{z^3}{81} + \dots \end{aligned}$$

z の範囲は $|Z| < 1$ より, $|z| < 3$ となる.

(2) $f(z)$ を変形して, $f(z) = \frac{1}{1-(z-2)}$ を得る.

$Z = z-2$ とおき

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-Z} \\ &= 1 + Z + Z^2 + Z^3 + \dots \\ &= 1 + (z-2) + (z-2)^2 + (z-2)^3 + \dots \end{aligned}$$

z の範囲は $|Z| < 1$ より, $|z-2| < 1$ となる.

(3) $Z = z^2$ とおき

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-Z} \\ &= 1 + Z + Z^2 + Z^3 + \dots \\ &= 1 + (z^2) + (z^2)^2 + (z^2)^3 + \dots \\ &= 1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots \end{aligned}$$

z の範囲は $|Z| < 1$ より, $|z| < 1$ となる.

2. (1) 1 は $g(z)$ の孤立特異点である. $g(z)$ を変形して, $g(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z-1}$ を得る.

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1-\{-(z-1)\}}$$

より, $Z = -(z-1)$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{1-Z} \\ &= 1 + Z + Z^2 + Z^3 + \dots \\ &= 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots \end{aligned}$$

$(|z-1| < 1)$

したがって

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z-1} \\ &= \{1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots\} \frac{1}{z-1} \\ &= \frac{1}{z-1} - 1 + (z-1) - (z-1)^2 + \dots \end{aligned}$$

$(0 < |z-1| < 1)$

(2) 0 は $g(z)$ の孤立特異点である. $g(z)$ を変形して, $g(z) = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z-1}$ を得る.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{1-z} \\ &= -(1 + z + z^2 + z^3 + \dots) \\ &= 1 - z - z^2 - z^3 - \dots \end{aligned}$$

$(|z| < 1)$

したがって

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z-1} \\ &= \frac{1}{z^2}(-1 - z - z^2 - z^3 - \dots) \\ &= -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1 - z - \dots \end{aligned}$$

$(0 < |z| < 1)$

(3) 4 は $g(z)$ の孤立特異点である. $g(z)$ を変形して, $g(z) = \frac{1}{z-3} \cdot \frac{1}{(z-4)^2}$ を得る.

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{1-\{-(z-4)\}}$$

より, $Z = -(z-4)$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-3} &= \frac{1}{1-Z} \\ &= 1 + Z + Z^2 + Z^3 + \dots \\ &= 1 - (z-4) + (z-4)^2 - (z-4)^3 + \dots \end{aligned}$$

$(|z-4| < 1)$

したがって

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z-3} \cdot \frac{1}{(z-4)^2} \\ &= \{1 - (z-4) + (z-4)^2 - (z-4)^3 + \dots\} \frac{1}{(z-4)^2} \\ &= \frac{1}{(z-4)^2} - \frac{1}{(z-4)} + 1 - (z-4) + \dots \end{aligned}$$

$(0 < |z-4| < 1)$