第 4 章 5 「関数の展開」 第 1 回

解答

1. (1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{z}{4}+\dfrac{z^2}{8}+\dfrac{z^3}{16}+\cdots \ (|z|<2)$ (2) $1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+\cdots \ (|z-1|<1)$

2. (1) $\dfrac{1}{z-3}-1+(z-3)-(z-3)^2+\cdots \ (0<|z-3|<1)$ (2) $-\dfrac{1}{z}-1-z-z^2-\cdots \ (0<|z|<1)$

解説

1. (1) $f(z)$ を変形して，$f(z)=\dfrac{1}{2-z}=\dfrac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}$ を得る．$Z=\dfrac{z}{2}$ とおき，例題のべき級数を用いると

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-Z}=\frac{1}{2}(1+Z+Z^2+Z^3+\cdots)=\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\frac{z^2}{2^3}+\frac{z^3}{2^4}+\cdots=\frac{1}{2}+\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}+\frac{z^3}{16}+\cdots$$

z の範囲は $|Z|<1$ より，$|z|<2$ となる．

(2) $f(z)$ を変形して，$f(z)=\dfrac{1}{1-(z-1)}$ を得る．$Z=z-1$ とおき，例題のべき級数を用いると

$$f(z)=\frac{1}{1-Z}=1+Z+Z^2+Z^3+\cdots=1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+\cdots$$

z の範囲は $|Z|<1$ より，$|z-1|<1$ となる．

2. (1) 3 は $g(z)$ の孤立特異点である．$g(z)$ を変形して，$g(z)=\dfrac{1}{z-2}\cdot\dfrac{1}{z-3}$ を得る．$\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{1-\{-(z-3)\}}$ より，$Z=-(z-3)$ とおくことにより

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{1-Z}=1+Z+Z^2+Z^3+\cdots=1-(z-3)+(z-3)^2-(z-3)^3+\cdots \quad (|z-3|<1)$$

したがって

$$\begin{aligned} g(z)&=\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{z-3}\\ &=\{1-(z-3)+(z-3)^2-(z-3)^3+\cdots\}\frac{1}{z-3}\\ &=\frac{1}{z-3}-1+(z-3)-(z-3)^2+\cdots \quad (0<|z-3|<1)\end{aligned}$$

なお，$z-3\fallingdotseq 0$ のため，z の範囲は $0<|z-3|<1$ となる．

(2) 0 は $g(z)$ の孤立特異点である．$g(z)$ を変形して，$g(z)=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{z-1}$ を得る．

$$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-(1+z+z^2+z^3+\cdots)=-1-z-z^2-z^3-\cdots \quad (|z|<1)$$

したがって

$$g(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z}(-1-z-z^2-z^3-\cdots)=-\frac{1}{z}-1-z-z^2-\cdots \quad (0<|z|<1)$$

なお，$z\fallingdotseq 0$ のため，z の範囲は $0<|z|<1$ となる．