第 4 章 4 「コーシーの積分定理」「コーシーの積分表示」 第 3 回

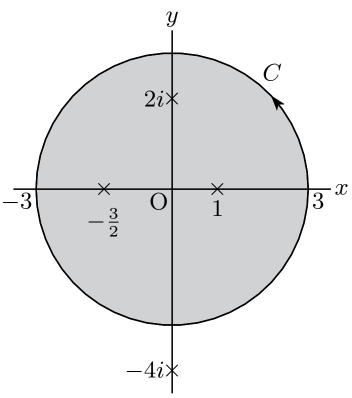
解答

1. (1) -6π　(2) $10\pi i$　(3) -4π　(4) 0

2. (1) $2\pi i$　(2) $8\pi i$　(3) $3\sqrt{2}\pi i$　(4) 80π

解説

1. (1) 与式を変形して $\displaystyle\int_C \frac{3i}{z-1}\,dz = 3i\int_C \frac{1}{z-1}\,dz$ を得る．



変形後の式にコーシーの積分定理を用いる．点 1 は C の内部にあるので

$$\int_C \frac{3i}{z-1}\,dz = 3i\cdot(2\pi i) = -6\pi$$

(2) 与式を変形して $\displaystyle\int_C \frac{5}{z-2i}\,dz = 5\int_C \frac{1}{z-2i}\,dz$ を得る．変形後の式にコーシーの積分定理を用いる．点 $2i$ は C の内部にあるので

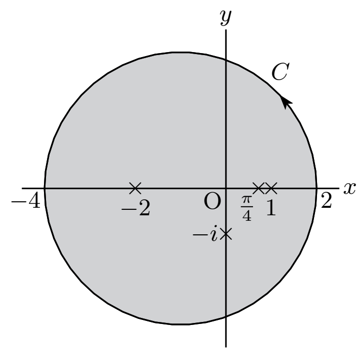
$$\int_C \frac{5}{z-2i}\,dz = 5\cdot(2\pi i) = 10\pi i$$

(3) 与式を変形して $\displaystyle\int_C \frac{2i}{z+\frac{3}{2}}\,dz = 2i\int_C \frac{1}{z-\left(-\frac{3}{2}\right)}\,dz$ を得る．変形後の式にコーシーの積分定理を用いる．点 $-\dfrac{3}{2}$ は C の内部にあるので

$$\int_C \frac{2i}{z+\frac{3}{2}}\,dz = 2i\cdot(2\pi i) = -4\pi$$

(4) 点 $-4i$ は C の外部にある．コーシーの積分定理より $\displaystyle\int_C \frac{1}{6i(z+4i)}\,dz = \frac{1}{6i}\int_C \frac{1}{z-(-4i)}\,dz = 0$

2. (1) $f(z) = z^3$ とおく．点 1 は C の内部にあるので，コーシーの積分表示より



$$f(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-1}\,dz$$

$$\therefore\quad \int_C \frac{z^3}{z-1}\,dz \int_C \frac{f(z)}{z-1}\,dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i\cdot 1^3 = 2\pi i$$

(2) $f(z) = 4e^{2\pi z}$ とおく．点 $-i$ は C の内部にあるので，コーシーの積分表示より

$$f(-i) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-(-i)}\,dz$$

$$\therefore\quad \int_C \frac{4e^{2\pi z}}{z+i}\,dz = \int_C \frac{f(z)}{z-(-i)}\,dz = 2\pi i\, f(-i)$$

$$= 2\pi i\cdot(4e^{-2\pi i}) = 8\pi i(\cos 2\pi - i\sin 2\pi) = 8\pi i$$

(3) $f(z) = 3\sin z$ とおく．点 $\dfrac{\pi}{4}$ は C の内部にあるので，コーシーの積分表示より

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-\frac{\pi}{4}}\,dz$$

$$\therefore\quad \int_C \frac{3\sin z}{z-\frac{\pi}{4}}\,dz = \int_C \frac{f(z)}{z-\frac{\pi}{4}}\,dz = 2\pi i\, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\pi i\left(3\sin\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2}\pi i$$

(4) $f(z) = 5iz^3$ とおく．点 -2 は C の内部にあるので，コーシーの積分表示より

$$f(-2) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-(-2)}\,dz$$

$$\therefore\quad \int_C \frac{5iz^3}{z+2}\,dz = \int_C \frac{f(z)}{z-(-2)}\,dz = 2\pi i\, f(-2) = 2\pi i\cdot 5i(-2)^3 = 80\pi$$