

解答

1. (1) 0                                      (2)  $-2\pi$                                       (3)  $\frac{6\pi}{5}i$                                       (4) 0  
 2. (1)  $32\pi i$                                       (2)  $-6\pi i$                                       (3) 0                                      (4)  $8\pi$

解説

1. (1) 点  $5i$  は  $C$  の外部にある。コーシーの積分定理より

$$\int_C \frac{2}{z-5i} dz = 2 \int_C \frac{1}{z-5i} dz = 0$$

(2) 与式を変形して  $\int_C \frac{i}{z+2} dz = i \int_C \frac{1}{z-(-2)} dz$  を得る。変形後の式にコーシーの積分定理を用いる。点  $-2$  は  $C$  の内部にあるので

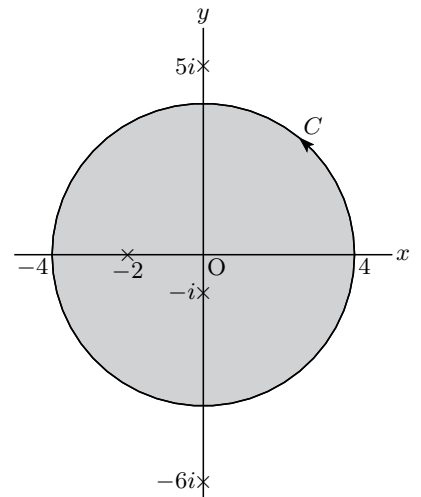
$$\int_C \frac{i}{z+2} dz = i \int_C \frac{1}{z-(-2)} dz = i \cdot (2\pi i) = -2\pi$$

(3) 与式を変形して  $\int_C \frac{3}{5(z+i)} dz = \frac{3}{5} \int_C \frac{1}{z-(-i)} dz$  を得る。変形後の式にコーシーの積分定理を用いる。点  $-i$  は  $C$  の内部にあるので

$$\int_C \frac{3}{5(z+i)} dz = \frac{3}{5} \int_C \frac{1}{z-(-i)} dz = \frac{3}{5} \cdot (2\pi i) = \frac{6\pi}{5}i$$

(4) 点  $-6i$  は  $C$  の外部にある。コーシーの積分定理より

$$\int_C \frac{1}{z+6i} dz = \int_C \frac{1}{z-(-6i)} dz = 0$$



2. (1)  $f(z) = z^4$  とおく。点  $2$  は  $C$  の内部にあるので、コーシーの積分表示より

$$f(2) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-2} dz$$

$$\therefore \int_C \frac{z^4}{z-2} dz = \int_C \frac{f(z)}{z-2} dz = 2\pi i f(2) = 2\pi i \cdot 2^4 = 32\pi i$$

(2)  $f(z) = 3e^{\pi z}$  とおく。点  $i$  は  $C$  の内部にあるので、コーシーの積分表示より

$$f(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-i} dz$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_C \frac{3e^{\pi z}}{z-i} dz &= \int_C \frac{f(z)}{z-i} dz \\ &= 2\pi i f(i) = 2\pi i \cdot (3e^{\pi i}) = 6\pi i (\cos \pi + i \sin \pi) = -6\pi i \end{aligned}$$

(3)  $f(z) = \sin z$  とおく。点  $\pi$  は  $C$  の内部にあるので、コーシーの積分表示より

$$f(\pi) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-\pi} dz$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_C \frac{\sin z}{5(z-\pi)} dz &= \frac{1}{5} \int_C \frac{\sin z}{z-\pi} dz \\ &= \frac{1}{5} \int_C \frac{f(z)}{z-\pi} dz = \frac{1}{5} \cdot 2\pi i f(\pi) = \frac{2}{5}\pi i \sin \pi = 0 \end{aligned}$$

(4)  $f(z) = 4iz^2$  とおく。点  $-i$  は  $C$  の内部にあるから、コーシーの積分表示より

$$f(-i) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-(-i)} dz$$

$$\therefore \int_C \frac{4iz^2}{z+i} dz = \int_C \frac{f(z)}{z-(-i)} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \cdot 4i(-i)^2 = 8\pi$$

