第４章 4 「コーシーの積分定理」「コーシーの積分表示」 第１回

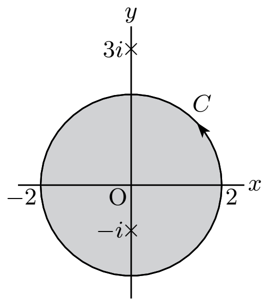
解答

1. (1) 0　　(2) $6\pi i$

2. (1) $18\pi i$　　(2) $8\pi e^2 i$

解説

1. (1) 点 $3i$ は C の外部にある．コーシーの積分定理より

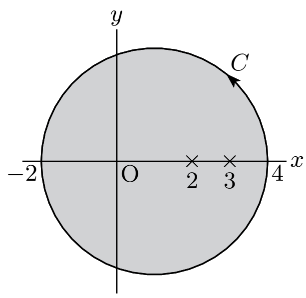


$$\int_C \frac{4}{z-3i}\,dz = 4\int_C \frac{1}{z-3i}\,dz = 0$$

(2) 与式を変形して $\displaystyle\int_C \frac{3}{z+i}\,dz = 3\int_C \frac{1}{z-(-i)}\,dz$ を得る．変形後の式にコーシーの積分定理を用いる．点 $-i$ は C の内部にあるので

$$\int_C \frac{3}{z+i}\,dz = 3\int_C \frac{1}{z-(-i)}\,dz = 3\cdot(2\pi i) = 6\pi i$$

2. (1) $f(z) = z^2$ とおく．点 3 は C の内部にあるので，コーシーの積分表示より



$$f(3) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-3}\,dz$$

$$\therefore \quad \int_C \frac{z^2}{z-3}\,dz = \int_C \frac{f(z)}{z-3}\,dz = 2\pi i f(3) = 2\pi i\cdot 3^2 = 18\pi i$$

(2) $g(z) = 4e^z$ とおく．点 2 は C の内部にあるので，コーシーの積分表示より

$$g(2) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)}{z-2}\,dz$$

$$\therefore \quad \int_C \frac{4e^z}{z-2}\,dz = \int_C \frac{g(z)}{z-2}\,dz = 2\pi i\, g(2) = 2\pi i(4e^2) = 8\pi e^2 i$$