第4章 3 「複素積分」 第3回

解答

1. (1) i (2) $-1-\dfrac{37}{3}i$ (3) $2ei$

2. (1) $-\dfrac{10}{3}\pi$ (2) 0

3. (1) $-4+3i$ (2) $-i$ (3) $-\dfrac{486}{5}$

解説

1. (1) $\dfrac{dz}{dt}=1+3it^2$ より

$$\begin{aligned}\int_C z\,dz &= \int_0^1 (t+it^3)\cdot(1+3it^2)\,dt\\ &= \int_0^1(-3t^5+4it^3+t)\,dt\\ &= \Big[-\frac{1}{2}t^6+it^4+\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1\\ &= \Big(-\frac{1}{2}+i+\frac{1}{2}\Big)-0=i\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{dz}{dt}=3-2i$ より

$$\begin{aligned}\int_C (z^2+i)\,dz &= \int_0^1\{(3t-2it)^2+i\}\cdot(3-2i)\,dt\\ &= (3-2i)\int_0^1\{(5-12i)t^2+i\}\,dt\\ &= (3-2i)\Big[\frac{5-12i}{3}t^3+it\Big]_0^1\\ &= (3-2i)\Big(\frac{5-12i}{3}+i\Big)\\ &= (3-2i)\cdot\frac{5-9i}{3}\\ &= -1-\frac{37}{3}i\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{dz}{dt}=i$ より

$$\int_C \mathrm{Im}(e^z)\,dz$$

$$= \int_0^\pi \mathrm{Im}(e^{1+it})\cdot i\,dt = i\int_0^\pi e\sin t\,dt$$

$(\because\ \mathrm{Im}(e^{1+it})=\mathrm{Im}(e(\cos t+i\sin t))=e\sin t)$

$$= ei\Big[-\cos t\Big]_0^\pi = 2ei$$

2. $\dfrac{dz}{dt}=3ie^{it}$ を用いて計算する．

(1)
$$\begin{aligned}\int_C \frac{5i}{3z-i}\,dz &= \int_0^{2\pi}\frac{5i}{(i+9e^{it})-i}\cdot 3ie^{it}\,dt\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{5i^2}{9e^{it}}\cdot 3e^{it}\,dt\\ &= -\frac{5}{3}\int_0^{2\pi}dt\\ &= -\frac{5}{3}\Big[t\Big]_0^{2\pi} = -\frac{10}{3}\pi\end{aligned}$$

[注意] 教科書 p.126 の例題 2 の結果を用いて，次のように計算することもできる．

$$\int_C \frac{5i}{3z-i}dz = \frac{5i}{3}\int_C \frac{1}{z-\frac{i}{3}}dz = \frac{5i}{3}\cdot 2\pi i = -\frac{10}{3}\pi$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_C \frac{2}{(3z-i)^2}\,dz &= \int_0^{2\pi}\frac{2}{\{(i+9e^{it})-i\}^2}\cdot 3ie^{it}\,dt\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{2i}{27e^{it}}\,dt\\ &= \frac{2i}{27}\int_0^{2\pi}e^{-it}\,dt\\ &= \frac{2i}{27}\Big[\frac{1}{-i}e^{-it}\Big]_0^{2\pi}\\ &= -\frac{2}{27}(e^{-2\pi i}-e^0)\\ &= -\frac{2}{27}\{(\cos 2\pi - i\sin 2\pi)-1\}=0\end{aligned}$$

[注意] 教科書 p.126 の例題 2 の結果を用いて，次のように計算することもできる．

$$\int_C \frac{2}{(3z-i)^2}\,dz = \frac{2}{9}\int_C \frac{1}{\left(z-\frac{i}{3}\right)^2}\,dz = 0$$

3. (1) $C: z=t+3it\ (0\leqq t\leqq 1)$ である．

$\dfrac{dz}{dt}=1+3i$ より

$$\begin{aligned}\int_C z\,dz &= \int_0^1 (t+3it)\cdot(1+3i)\,dt\\ &= (1+3i)^2\int_0^1 t\,dt\\ &= (-8+6i)\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1 = -4+3i\end{aligned}$$

[注意] 教科書 p.129(6) を用いて

$$\begin{aligned}\int_C z\,dz &= \int_0^{1+3i} z\,dz\\ &= \Big[\frac{1}{2}z^2\Big]_0^{1+3i} = \frac{1}{2}(1+3i)^2-0=-4+3i\end{aligned}$$

と計算することもできる．

(2) $C: z=i(1-t)\ (0\leqq t\leqq 1)$ である．

$\dfrac{dz}{dt}=-i$ より

$$\begin{aligned}\int_C \mathrm{Im}(2z)\,dz &= \int_0^1 2(1-t)\cdot(-i)\,dt\\ &= -2i\int_0^1(1-t)\,dt\\ &= -2i\Big[t-\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1 = -i\end{aligned}$$

(3) $C: z=3+3e^{it}\ (0\leqq t\leqq \pi)$ である．

$\dfrac{dz}{dt}=3ie^{it}$ より

$$\begin{aligned}\int_C (z-3)^4\,dz &= \int_0^\pi (3+3e^{it}-3)^4\cdot(3ie^{it})\,dt\\ &= 243i\int_0^\pi e^{5it}\,dt\\ &= 243i\Big[\frac{1}{5i}e^{5it}\Big]_0^\pi\\ &= \frac{243}{5}(e^{5i\pi}-e^0) = -\frac{486}{5}\end{aligned}$$