# 第4章 3 「複素積分」 第2回

## 解答

**1.** (1) $i$ (2) $\frac{5}{2}$ (3) $1$

**2.** (1) $-4\pi$ (2) $0$

**3.** (1) $-i$ (2) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ (3) $-\frac{2}{3}$

## 解説

**1.** (1) $\frac{dz}{dt}=2t+i$ より

$$\begin{aligned}\int_C z\,dz &= \int_0^1 (t^2+it)\cdot(2t+i)\,dt \\ &= \int_0^1 (2t^3+3it^2-t)\,dt \\ &= \Big[\frac{1}{2}t^4+it^3-\frac{1}{2}t^2\Big]_0^1 \\ &= \Big(\frac{1}{2}+i-\frac{1}{2}\Big)-0=i\end{aligned}$$

(2) $\frac{dz}{dt}=2+i$ より

$$\begin{aligned}\int_C \overline{z}\,dz &= \int_0^1 \overline{2t+it}\cdot(2+i)\,dt \\ &= \int_0^1 (2t-it)(2+i)\,dt \\ &= \int_0^1 5t\,dt \\ &= \Big[\frac{5}{2}t^2\Big]_0^1=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

(3) $\frac{dz}{dt}=ie^{it}$ より

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{z^3}\,dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(e^{it})^3}\cdot ie^{it}\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ie^{it}}{e^{3it}}\,dt \\ &= i\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2it}\,dt \\ &= i\Big[\frac{1}{-2i}e^{-2it}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{1}{2}(e^{-i\pi}-e^0) \\ &= -\frac{1}{2}\{(\cos\pi-i\sin\pi)-1\}=1\end{aligned}$$

$$(\because\ \ e^{-i\pi}=\cos\pi-i\sin\pi=-1\ )$$

**2.** $\frac{dz}{dt}=5ie^{it}$ を用いて計算する.

(1)
$$\begin{aligned}\int_C \frac{2i}{z+1}\,dz &= \int_0^{2\pi} \frac{2i}{(-1+5e^{it})+1}\cdot 5ie^{it}\,dt \\ &= -2\int_0^{2\pi} dt=-2\Big[t\Big]_0^{2\pi}=-4\pi\end{aligned}$$

[注意] 教科書 p.126 の例題 2 の結果を用いて，次のように計算することもできる.

$$\int_C \frac{2i}{z+1}\,dz=2i\int_C \frac{1}{z+1}\,dz=2i\cdot 2\pi i=-4\pi$$

(2)
$$\begin{aligned}\int_C \frac{3}{(z+1)^4}\,dz &= \int_0^{2\pi} \frac{3}{\{(-1+5e^{it})+1\}^4}\cdot 5ie^{it}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{3i}{125e^{3it}}\,dt \\ &= \frac{3i}{125}\int_0^{2\pi} e^{-3it}\,dt \\ &= \frac{3i}{125}\Big[\frac{1}{-3i}e^{-3it}\Big]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{1}{125}(e^{-6\pi i}-e^0) \\ &= -\frac{1}{125}\{(\cos 6\pi-i\sin 6\pi)-e^0\}=0\end{aligned}$$

[注意] 教科書 p.126 の例題 2 の結果を用いて，次のように計算することもできる.

$$\int_C \frac{3}{(z+1)^4}\,dz=3\int_C \frac{1}{(z+1)^4}\,dz=3\cdot 0=0$$

**3.** (1) $C: z=t-it\ (0\leqq t\leqq 1)$ である.

$\frac{dz}{dt}=1-i$ より

$$\begin{aligned}\int_C z\,dz &= \int_0^1 (t-it)\cdot(1-i)\,dt \\ &= \int_0^1 -2it\,dt=-i\Big[t^2\Big]_0^1=-i\end{aligned}$$

[注意] 教科書 p.129(6) を用いて

$$\begin{aligned}\int_C z\,dz &= \int_0^{1-i} z\,dz \\ &= \Big[\frac{1}{2}z^2\Big]_0^{1-i}=\frac{1}{2}(1-i)^2-0=-i\end{aligned}$$

と計算することもできる.

(2) $C: z=(1-t)+it\quad (0\leqq t\leqq 1)$ である.

$\frac{dz}{dt}=-1+i$ より

$$\begin{aligned}\int_C \mathrm{Re}(z)\,dz &= \int_0^1 (1-t)\cdot(-1+i)\,dt \\ &= \int_0^1 \{(1-i)t-1+i\}\,dt \\ &= \Big[\frac{1}{2}(1-i)t^2-t+it\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(1-i)-1+i=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\end{aligned}$$

(3) $C: z=2+e^{it}\ (0\leqq t\leqq \pi)$ である.

$\frac{dz}{dt}=ie^{it}$ より

$$\begin{aligned}\int_C (z-2)^2\,dz &= \int_0^{\pi} (2+e^{it}-2)^2\cdot(ie^{it})\,dt \\ &= i\int_0^{\pi} e^{3it}\,dt=i\Big[\frac{1}{3i}e^{3it}\Big]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{3}(e^{3i\pi}-e^0) \\ &= \frac{1}{3}\{(\cos 3\pi-i\sin 3\pi)-1\} \\ &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$