

第4章3 「複素積分」 第1回

解答

1. (1) i (2) $-\frac{2}{3} + i$ (3) 2

2. (1) $4\pi i$ (2) 0

3. (1) $\frac{1}{2}$ (2) -1

解説

1. (1) $\frac{dz}{dt} = 1 + 2it$ より

$$\begin{aligned} \int_C z dz &= \int_0^1 (t + it^2) \cdot (1 + 2it) dt \\ &= \int_0^1 (-2t^3 + 3it^2 + t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^4 + it^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 \\ &= \left(-\frac{1}{2} + i + \frac{1}{2} \right) - 0 = i \end{aligned}$$

(2) $\frac{dz}{dt} = 1$ より

$$\begin{aligned} \int_C z^2 dz &= \int_0^1 (t + i)^2 \cdot 1 dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + 2it - 1) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 + it^2 - t \right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1}{3} + i - 1 \right) - 0 = -\frac{2}{3} + i \end{aligned}$$

(3) $\frac{dz}{dt} = ie^{it}$ より

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{z^2} dz &= \int_0^\pi \frac{1}{(e^{it})^2} \cdot ie^{it} dt \\ &= \int_0^\pi \frac{ie^{it}}{e^{2it}} dt \\ &= \int_0^\pi ie^{it-2it} dt \\ &= \int_0^\pi e^{-it} dt \\ &= i \left[\frac{1}{-i} e^{-it} \right]_0^\pi \\ &= \frac{i}{-i} (e^{-i\pi} - e^0) \\ &= -\{(\cos \pi - i \sin \pi) - 1\} = 2 \\ &(\because e^{-i\pi} = \cos \pi - i \sin \pi) \end{aligned}$$

2. $\frac{dz}{dt} = 4ie^{it}$ を用いて計算する.

$$\begin{aligned} (1) \int_C \frac{2}{z-3} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{2}{(3+4e^{it})-3} \cdot 4ie^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2}{4e^{it}} \cdot 4ie^{it} dt \\ &= 2i \int_0^{2\pi} dt = 4\pi i \end{aligned}$$

[注意] 教科書 p.126 の例題 2 の結果を用いて

$$\int_C \frac{2}{z-3} dz = 2 \int_C \frac{1}{z-3} dz = 2 \cdot 2\pi i = 4\pi i$$

と計算することもできる.

$$\begin{aligned} (2) \int_C \frac{1}{(z-3)^3} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\{(3+4e^{it})-3\}^3} \cdot 4ie^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{i}{16e^{2it}} dt \\ &= \frac{i}{16} \int_0^{2\pi} e^{-2it} dt \\ &= \frac{i}{16} \left[\frac{1}{-2i} e^{-2it} \right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{1}{32} (e^{-4\pi i} - e^0) \\ &= -\frac{1}{32} \{(\cos 4\pi - i \sin 4\pi) - e^0\} = 0 \end{aligned}$$

[注意] 教科書 p.126 の例題 2 の結果を用いて

$$\int_C \frac{1}{(z-3)^3} dz = 0 \text{ と計算することもできる.}$$

3. (1) $C: z = t$ ($0 \leq t \leq 1$) である.

$$\frac{dz}{dt} = 1 \text{ より}$$

$$\int_C z dz = \int_0^1 t \cdot 1 dt = \int_0^1 t dt = \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

[注意] 教科書 p.129(6) を用いて

$$\int_C z dz = \left[\frac{1}{2}z^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

と計算することもできる.

(2) $C: z = (1+i)t = t + it$ ($0 \leq t \leq 1$) である.

$$\frac{dz}{dt} = 1 + i \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \int_C (z-1) dz &= \int_0^1 (t+it-1) \cdot (1+i) dt \\ &= \int_0^1 (t+it+it+i^2t-1-i) dt \\ &= \int_0^1 (2it-1-i) dt \\ &= \left[it^2 - t - it \right]_0^1 \\ &= (i-1-i) - 0 = -1 \end{aligned}$$

[注意] 教科書 p.129(6) を用いて

$$\begin{aligned} \int_C (z-1) dz &= \int_0^{1+i} (z-1) dz \\ &= \left[\frac{1}{2}z^2 - z \right]_0^{1+i} \\ &= \frac{1}{2}(1+i)^2 - (1+i) - 0 \\ &= \frac{1}{2}(1+2i-1) - 1 - i \\ &= i - 1 - i = -1 \end{aligned}$$

と計算することもできる.