

解答

1. (1)  $-1$  (2)  $e^2$  (3)  $-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^\pi} - e^\pi\right)i$   
 2. (1)  $1 + \frac{i}{3}$  (2)  $8$  (3)  $i$   
 3. (1)  $5z^4 - 3z^2 + 2z - 1$  (2)  $3z^2 + 2(1 + 3i)z + 4i$  (3)  $\frac{iz^2(2z - 3)}{(z^2 + z - 1)^2}$   
 4. (1)  $u = 16x^2 - 4y^2, v = -16xy$  (2)  $u = \frac{x}{x^2 + (y - 1)^2}, v = -\frac{y - 1}{x^2 + (y - 1)^2}$   
 5. (1) 正則,  $f'(z) = 2x + 2yi$  (2) 正則でない (3) 正則,  $f'(z) = -e^y(\sin x + i \cos x)$

解説

1.  $z = x + iy$  のとき  $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$  と定義される.

(1)  $e^{-3\pi i} = e^{0+i(-3\pi)} = e^0(\cos 3\pi - i \sin 3\pi) = -1$

(2)  $e^{2-2\pi i} = e^{2+i(-2\pi)} = e^2(\cos 2\pi - i \sin 2\pi) = e^2$

(3) 教科書 p.112 より

$$\sin \pi i = \frac{e^{i(\pi i)} - e^{-i(\pi i)}}{2i} = \frac{e^{-\pi} - e^\pi}{2i} = \frac{1}{2i}(e^{-\pi} - e^\pi) = \frac{i}{(2i) \cdot i}(e^{-\pi} - e^\pi) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^\pi} - e^\pi\right)i$$

2. (1)  $\lim_{z \rightarrow i+3} \frac{z}{z-i} = \frac{i+3}{(i+3)-i} = 1 + \frac{i}{3}$

(2)  $\lim_{z \rightarrow 1+i} 4z\bar{z} = 4(1+i)\overline{(1+i)} = 4(1+i)(1-i) = 4 \cdot 2 = 8$

(3)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left( \frac{i}{z-i} + 1 \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \left\{ \frac{i + (z-i)}{z-i} \right\} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z-i} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z-i} = \frac{1}{-i} = \frac{i}{(-i) \cdot i} = i$

3. (1)  $(z^n)' = nz^{n-1}$  ( $n$  は自然数) を用いる.  $w' = (z^5 - z^3 + z^2 - z - 6)' = 5z^4 - 3z^2 + 2z - 1$

(2) 積の微分公式  $(fg)' = f'g + fg'$  を用いる.

$$w' = (z^2 + z + i)'(z + 3i) + (z^2 + z + i)(z + 3i)' = (2z + 1)(z + 3i) + (z^2 + z + i) \cdot 1 = 3z^2 + 2(1 + 3i)z + 4i$$

(3) 商の微分公式  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$  を用いる.

$$w' = \frac{(iz^3)'(z^3 + z - 1) - (iz^3)(z^3 + z - 1)'}{(z^3 + z - 1)^2} = \frac{3iz^2 \cdot (z^3 + z - 1) - (iz^3) \cdot (3z^2 + 1)}{(z^2 + z - 1)^2} = \frac{iz^2(2z - 3)}{(z^2 + z - 1)^2}$$

4. 問題の関数へ  $w = u + vi, z = x + yi$  を代入する.

(1)  $u + vi = \{(x + yi) + 3 \cdot \overline{x + yi}\}^2 = (4x - 2yi)^2 = 16x^2 - 16xyi - 4y^2 = 16x^2 - 4y^2 - 16xyi$   
 両辺の実部と虚部を比較して  $u = 16x^2 - 4y^2, v = -16xy$  を得る.

(2)  $u + vi = \frac{1}{(x + yi) - i} = \frac{1}{x + (y - 1)i}$   

$$= \frac{x - (y - 1)i}{\{x + (y - 1)i\}\{x - (y - 1)i\}} = \frac{x}{x^2 + (y - 1)^2} - \frac{y - 1}{x^2 + (y - 1)^2}i$$
  
 両辺の実部と虚部を比較して  $u = \frac{x}{x^2 + (y - 1)^2}, v = -\frac{y - 1}{x^2 + (y - 1)^2}$  を得る.

5. (1)  $u = x^2 - y^2 - 4, v = 2xy - 5$  と考える.  $u_x = 2x = v_y$  かつ  $u_y = -2y = -v_x$  である. コーシー・リーマンの関係式を満たすため,  $f(z)$  は正則である. 導関数は  $f'(z) = 2x + 2yi$  となる.  
 (2)  $u = x^2 - y^2 - y, v = 2xy + x^3$  と考える.  $u_x = 2x = v_y$  だが  $u_y = -2y - 1, -v_x = -(2y + 3x^2)$  より,  $u_y \neq -v_x$  である. コーシー・リーマンの関係式を満たさないため,  $f(z)$  は正則でない.  
 (3)  $f(z) = e^y \cos x - (e^y \sin x)i$  から  $u = e^y \cos x, v = -e^y \sin x$  と考える.  $u_x = -e^y \sin x = v_y$  および  $u_y = e^y \cos x = -v_x$  である. コーシー・リーマンの関係式を満たすため,  $f(z)$  は正則である. 導関数は  $f'(z) = -e^y \sin x - ie^y \cos x = -e^y(\sin x + i \cos x)$  となる.