第4章 2 「複素数」「正則関数」「コーシー・リーマンの関係式」 第2回

解答

1. (1) -1　(2) $-e^2$　(3) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{e^{2\pi}}+e^{2\pi}\right)$

2. (1) -1　(2) $6i$　(3) -1

3. (1) $3z^2+2$　(2) $8z^3-3z^2+2$　(3) $\dfrac{z(z+2i)}{(z^2+z+i)^2}$

4. (1) $u=x^2-(y-2)^2,\ v=2x(y-2)$　(2) $u=\dfrac{x+2}{(x+2)^2+y^2},\ v=-\dfrac{y}{(x+2)^2+y^2}$

5. (1) 正則，$f'(z)=2i$　(2) 正則でない　(3) 正則でない

解説

1. $z=x+iy$ のとき $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ と定義される．

(1) $e^{\pi i}=e^{0+i(\pi)}=e^0(\cos\pi+i\sin\pi)=-1$　(2) $e^{2+\pi i}=e^{2+i(\pi)}=e^2(\cos\pi+i\sin\pi)=-e^2$

(3) 教科書 p.112 より $\cos 2\pi i=\dfrac{e^{i(2\pi i)}+e^{i(-2\pi i)}}{2}=\dfrac{e^{-2\pi}+e^{2\pi}}{2}=\dfrac{1}{2}(e^{-2\pi}+e^{2\pi})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{e^{2\pi}}+e^{2\pi}\right)$

2. (1) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{z-i}{z+i}=\frac{-i}{i}=-1$

(2) $\displaystyle\lim_{z\to 1+i}3(z-\overline{z})=3\{(1+i)-\overline{(1+i)}\}=3\{(1+i)-(1-i)\}=6i$

(3) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z-1}+1\right)=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\left\{\frac{1+(z-1)}{z-1}\right\}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}\cdot\frac{z}{z-1}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{z-1}=-1$

3. (1) $(z^n)'=nz^{n-1}$ (n は自然数) を用いる．$w'=(z^3+2z-4)'=3z^2+2$

(2) 積の微分公式 $(fg)'=f'g+fg'$ を用いる．

$$w'=(z^3+1)'(2z-1)+(z^3+1)(2z-1)'=3z^2\cdot(2z-1)+(z^3+1)\cdot 2=8z^3-3z^2+2$$

(3) 商の微分公式 $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$ を用いる．

$$w'=\frac{(z^2)'(z^2+z+i)-z^2(z^2+z+i)'}{(z^2+z+i)^2}=\frac{2z\cdot(z^2+z+i)-z^2\cdot(2z+1)}{(z^2+z+i)^2}=\frac{z(z+2i)}{(z^2+z+i)^2}$$

4. 問題の関数へ $w=u+vi,\ z=x+yi$ を代入する．

(1) $u+vi=\{(x+yi)-2i\}^2=\{x+(y-2)i\}^2=x^2+2x(y-2)i-(y-2)^2=x^2-(y-2)^2+2x(y-2)i$
両辺の実部と虚部を比較して $u=x^2-(y-2)^2,\ v=2x(y-2)$ を得る．

(2) $u+vi=\dfrac{1}{(x+yi)+2}=\dfrac{1}{(x+2)+yi}$

$$=\frac{(x+2)-yi}{\{(x+2)+yi\}\{(x+2)-yi\}}=\frac{x+2}{(x+2)^2+y^2}-\frac{y}{(x+2)^2+y^2}i$$

両辺の実部と虚部を比較して $u=\dfrac{x+2}{(x+2)^2+y^2},\ v=-\dfrac{y}{(x+2)^2+y^2}$ を得る．

5. (1) $u=-2y+1,\ v=2x$ と考える．$u_x=0=v_y$ かつ $u_y=-2=-v_x$ である．コーシー・リーマンの関係式を満たすため，$f(z)$ は正則である．導関数は $f'(z)=0+2i=2i$ となる．

(2) $u=x^2-y^2,\ v=1-xy$ と考える．$u_x=2x,\ v_y=-x$ より $u_x\neq v_y$ である．コーシー・リーマンの関係式を満たさないため，$f(z)$ は正則でない．

(3) $u=-3y,\ v=x^2$ と考える．$u_x=0=v_y$ だが $u_y=-3,\ -v_x=-2x$ より $u_y\neq -v_x$ である．コーシー・リーマンの関係式を満たさないため，$f(z)$ は正則でない．