第4章 2 「複素数」「正則関数」「コーシー・リーマンの関係式」 第1回

解答

1. (1) 1　(2) $-e$　(3) $\cos 1 + i\sin 1$

2. (1) 2　(2) $4-3i$　(3) $-2i$

3. (1) $3z^2+1$　(2) $3z^2-2iz+1$　(3) $\dfrac{-i}{(z-i)^2}$

4. (1) $u=x-2,\ v=-y$　(2) $u=(x-1)^2-y^2,\ v=2(x-1)y$

5. (1) 正則でない　(2) 正則，$f'(z)=i$

解説

1. 複素数 $z=x+iy$ の指数関数 $w=e^z$ は，教科書 p.112 の通りオイラーの公式を用いて次のように定義される．

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

(1) $e^{2\pi i} = e^{0+i(2\pi)} = e^0(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 1$

(2) $e^{1+\pi i} = e^{1+i(\pi)} = e^1(\cos\pi + i\sin\pi) = -e$

(3) $e^{i} = e^{0+i(1)} = e^0(\cos 1 + i\sin 1) = \cos 1 + i\sin 1$

2. (1) $\displaystyle\lim_{z\to 1+i}(z+\overline{z}) = (1+i)+\overline{(1+i)} = 1+i+1-i = 2$

(2) $\displaystyle\lim_{z\to 2+i}\frac{z^2}{z-2} = \frac{(2+i)^2}{(2+i)-2} = \frac{4+4i+i^2}{i} = \frac{3+4i}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = \frac{-3i-4i^2}{-i^2} = \frac{-3i-4(-1)}{1} = 4-3i$

(3) $\displaystyle\lim_{z\to -i}\frac{z^2+1}{z+i} = \lim_{z\to -i}\frac{z^2-(-1)}{z+i} = \lim_{z\to -i}\frac{z^2-i^2}{z+i} = \lim_{z\to -i}\frac{(z+i)(z-i)}{z+i} = \lim_{z\to -i}(z-i) = -i-i = -2i$

3. (1) n が自然数のとき，実数の関数と同様に $(z^n)'=nz^{n-1}$ と計算できる．

$$w' = (z^3+z+1)' = 3z^2+1$$

(2) 実数の関数と同様に積の微分公式 $(fg)'=f'g+fg'$ を用いる．

$$w' = (z^2+1)'(z-i)+(z^2+1)(z-i)' = 2z\cdot(z-i)+(z^2+1)\cdot 1 = 3z^2-2iz+1$$

(3) 実数の関数と同様に商の微分公式 $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g-fg'}{g^2}$ を用いる．

$$w' = \frac{z'(z-i)-z(z-i)'}{(z-i)^2} = \frac{1\cdot(z-i)-z\cdot 1}{(z-i)^2} = \frac{-i}{(z-i)^2}$$

4. (1) 問題の関数へ $w=u+vi,\ z=x+yi$ を代入して $u+vi=\overline{x+yi}-2=x-yi-2=x-2-yi$ となる．両辺の実部と虚部を比較して $u=x-2,\ v=-y$ を得る．

(2) 問題の関数より

$$u+vi = (x+yi-1)^2 = \{(x-1)+yi\}^2 = (x-1)^2+2(x-1)yi+(yi)^2 = (x-1)^2-y^2+2(x-1)yi$$

両辺の実部と虚部を比較して $u=(x-1)^2-y^2,\ v=2(x-1)y$ を得る．

5. (1) 与えられた関数から $u=3(x+y),\ v=2x-y$ と考える．$u_x=3,\ v_y=-1$ より，$u_x \fallingdotseq v_y$ である．コーシー・リーマンの関係式を満たさないため，$f(z)$ は正則でない．

(2) 与えられた関数から $u=-y,\ v=x$ と考える．$u_x=0=v_y$ と $u_y=-1=-v_x$ である．コーシー・リーマンの関係式を満たすため，$f(z)$ は正則である．導関数は $f'(z)=0+1i=i$ となる．