第4章 1 「複素数と極形式」「絶対値と偏角」 第3回

解答

1. (1) $-7-5i$　　(2) $5+9i$　　(3) $20-5i$　　(4) $-\dfrac{8}{85}-\dfrac{19}{85}i$

2. (1) $\mathrm{Re}(z_1)=3,\quad \mathrm{Im}(z_1)=-4,\quad |\,z_1\,|=5,\quad \overline{z_1}=3+4i$

(2) $\mathrm{Re}(z_2)=\dfrac{4}{5},\quad \mathrm{Im}(z_2)=-\dfrac{3}{5},\quad |\,z_2\,|=1,\quad \overline{z_2}=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$

3. (1) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi+i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$　　(2) $2\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)$

4. (1) -4　　(2) $\dfrac{1}{64}$

5. (1) $2\sqrt{5}$　　(2) $\sqrt{29}$

解説

1. (1) $\alpha+\beta=(-1+2i)+(-6-7i)=(-1-6)+(2-7)i=-7-5i$

(2) $\alpha-\beta=(-1+2i)-(-6-7i)=\{-1-(-6)\}+\{2-(-7)\}i=5+9i$

(3) $\alpha\beta=(-1+2i)(-6-7i)=6+7i-12i-14i^2=6-5i-14(-1)=20-5i$

(4) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{-1+2i}{-6-7i}=\dfrac{(-1+2i)(-6+7i)}{(-6-7i)(-6+7i)}=\dfrac{6-7i-12i+14i^2}{(-6)^2-(7i)^2}=\dfrac{-8-19i}{85}=-\dfrac{8}{85}-\dfrac{19}{85}i$

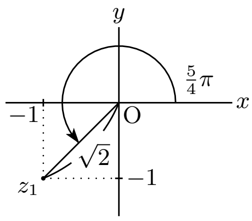
2. (1) $z_1=(2-i)^2=4-4i+i^2=4-4i-1=3-4i$

したがって，$\mathrm{Re}(z_1)=3,\quad \mathrm{Im}(z_1)=-4,\quad |\,z_1\,|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5,\quad \overline{z_1}=3+4i$

(2) $z_2=\dfrac{3-i}{3+i}=\dfrac{(3-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{9-6i+i^2}{3^2-i^2}=\dfrac{9-6i-1}{9+1}=\dfrac{8-6i}{10}=\dfrac{4}{5}-\dfrac{3}{5}i$

したがって，$\mathrm{Re}(z_2)=\dfrac{4}{5},\quad \mathrm{Im}(z_2)=-\dfrac{3}{5},\quad |\,z_2\,|=\sqrt{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2+\left(-\dfrac{3}{5}\right)^2}=1,\quad \overline{z_2}=\dfrac{4}{5}+\dfrac{3}{5}i$

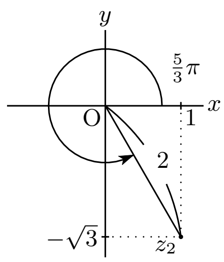
3. (1) 原点と点 z_1 との距離 $|z_1|$ を r，z_1 の偏角 $\arg z_1$ を θ とすると，点 z_1 の極座標は $(r,\theta)=\left(\sqrt{2},\dfrac{5}{4}\pi\right)$ となる．　$\therefore\quad z_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi+i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$



オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いて $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{5}{4}\pi}=\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi i}$ と表してもよい．

(2) 点 z_2 の極座標は $\left(2,\dfrac{5}{3}\pi\right)$ となる．

$\therefore\quad z_2=2\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)=2e^{\frac{5}{3}\pi i}$



4. 前問の結果を用いる．

(1) $(-1-i)^4=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi+i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)\right\}^4=2^{\frac{4}{2}}\left(\cos\dfrac{5}{4}\pi+i\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)^4$

$=2^2\left(\cos\dfrac{4\cdot5}{4}\pi+i\sin\dfrac{4\cdot5}{4}\pi\right)=4(\cos5\pi+i\sin5\pi)=4(-1+i\cdot0)=-4$

(2) $\dfrac{1}{(1-\sqrt{3}i)^6}=(1-\sqrt{3}i)^{-6}=\left\{2\left(\cos\dfrac{5}{3}\pi+i\sin\dfrac{5}{3}\pi\right)\right\}^{-6}$

$=2^{-6}\left\{\cos\dfrac{(-6)\cdot5}{3}\pi+i\sin\dfrac{(-6)\cdot5}{3}\pi\right\}=\dfrac{1}{64}\{\cos(-10\pi)+i\sin(-10\pi)\}$

$=\dfrac{1}{64}(1+i\cdot0)=\dfrac{1}{64}$

5. 教科書 p.109 にある通り，2 点 z_1，z_2 の距離は $|\,z_1-z_2\,|$ により計算できる．また，複素数 $z=x+yi$ のとき，その絶対値は $|\,z\,|=\sqrt{x^2+y^2}$ により計算できることに注意せよ．

(1) $|\,(7+8i)-(9+4i)\,|=|-2+4i\,|=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

(2) $|\,(-3-i)-(-1+4i)\,|=|-2-5i\,|=\sqrt{(-2)^2+(-5)^2}=\sqrt{29}$