第4章 1 「複素数と極形式」「絶対値と偏角」 第2回

解答

1. (1) $4+7i$　(2) $-2-i$　(3) $-9+13i$　(4) $\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}i$

2. (1) $\mathrm{Re}(z_1)=11,\quad \mathrm{Im}(z_1)=-2,\quad |\,z_1\,|=5\sqrt{5},\quad \overline{z_1}=11+2i$

(2) $\mathrm{Re}(z_2)=-2,\quad \mathrm{Im}(z_2)=2,\quad |\,z_2\,|=2\sqrt{2},\quad \overline{z_2}=-2-2i$

3. (1) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$　(2) $2\left(\cos\dfrac{5}{6}\pi+i\sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$

4. (1) $-8i$　(2) $8i$

5. (1) 7　(2) $\sqrt{13}$

解説

1. (1) $\alpha+\beta=(1+3i)+(3+4i)=(1+3)+(3+4)i=4+7i$

(2) $\alpha-\beta=(1+3i)-(3+4i)=(1-3)+(3-4)i=-2-i$

(3) $\alpha\beta=(1+3i)(3+4i)=3+4i+9i+12i^2=3+13i+12(-1)=-9+13i$

(4) $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{1+3i}{3+4i}=\dfrac{(1+3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\dfrac{3-4i+9i-12i^2}{3^2-(4i)^2}=\dfrac{15+5i}{25}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}i$

2. (1) $z_1=(1-2i)(3+4i)=3+4i-6i-8i^2=3-2i-8(-1)=11-2i$

したがって，$\mathrm{Re}(z_1)=11,\quad \mathrm{Im}(z_1)=-2,\quad |\,z_1\,|=\sqrt{11^2+(-2)^2}=5\sqrt{5},\quad \overline{z_1}=11+2i$

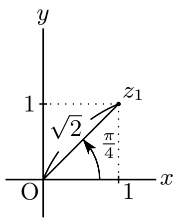
(2) $z_2=2i(1+i)=2i+2i^2=2i-2=-2+2i$

したがって，$\mathrm{Re}(z_2)=-2,\quad \mathrm{Im}(z_2)=2,\quad |\,z_2\,|=\sqrt{(-2)^2+2^2}=2\sqrt{2},\quad \overline{z_2}=-2-2i$

3. (1) 原点と点 z_1 との距離 $|z_1|$ を r，z_1 の偏角 $\arg z_1$ を θ とすると，点 z_1 の極座標は

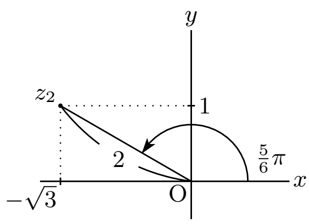
$(r,\theta)=\left(\sqrt{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$ となる．　$\therefore\quad z_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

オイラーの公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ を用いて $z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ と表してもよい．



(2) 点 z_2 の極座標は $\left(2,\dfrac{5}{6}\pi\right)$ となる．

$$\therefore\quad z_2=2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)=2e^{\frac{5}{6}\pi i}$$



4. 前問の結果を用いる．

(1)
$$\begin{aligned}(1+i)^6&=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^6=2^{\frac{6}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^6\\&=2^3\left(\cos\frac{6}{4}\pi+i\sin\frac{6}{4}\pi\right)=8\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)\\&=8\left\{0+i(-1)\right\}=-8i\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(-\sqrt{3}+i)^3&=\left\{2\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)\right\}^3=2^3\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)^3\\&=2^3\left(\cos\frac{3\cdot5}{6}\pi+i\sin\frac{3\cdot5}{6}\pi\right)=8\left(\cos\frac{5}{2}\pi+i\sin\frac{5}{2}\pi\right)\\&=8\left(0+i\cdot1\right)=8i\end{aligned}$$

5. 教科書 p.109 にある通り，2 点 z_1，z_2 の距離は $|\,z_1-z_2\,|$ により計算できる．また，複素数 $z=x+yi$ のとき，その絶対値は $|\,z\,|=\sqrt{x^2+y^2}$ により計算できることに注意せよ．

(1) $|\,(2+4i)-(2-3i)\,|=|\,7i\,|=\sqrt{0^2+7^2}=7$

(2) $|\,3-(1+3i)\,|=|\,2-3i\,|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$