

解答

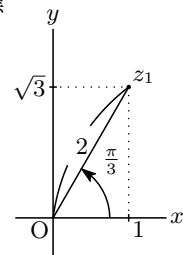
1. (1) $3 + i$ (2) $-1 - 7i$ (3) $14 - 2i$ (4) $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
2. $\operatorname{Re}(z) = -13, \operatorname{Im}(z) = -1, |z| = \sqrt{170}, \bar{z} = -13 + i$
3. (1) $2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$ (2) $2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$
4. (1) 64 (2) $-8 + 8\sqrt{3}i$
5. (1) $\sqrt{17}$ (2) $2\sqrt{5}$

解説

1. (1) $\alpha + \beta = (1 - 3i) + (2 + 4i) = (1 + 2) + (-3 + 4)i = 3 + i$
 (2) $\alpha - \beta = (1 - 3i) - (2 + 4i) = (1 - 2) + (-3 - 4)i = -1 - 7i$
 (3) $\alpha\beta = (1 - 3i)(2 + 4i) = 2 + 4i - 6i - 12i^2 = 2 - 2i - 12(-1) = 14 - 2i$
 (4) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1 - 3i}{2 + 4i} = \frac{(1 - 3i)(2 - 4i)}{(2 + 4i)(2 - 4i)} = \frac{2 - 4i - 6i + 12i^2}{2^2 - (4i)^2} = \frac{-10 - 10i}{20} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

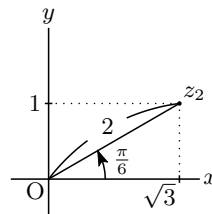
2. $z = (-3 + 5i)(1 + 2i) = -3 - 6i + 5i + 10i^2 = -3 - i + 10(-1) = -13 - i$
 したがって、 $\operatorname{Re}(z) = -13, \operatorname{Im}(z) = -1, |z| = \sqrt{(13)^2 + (-1)^2} = \sqrt{170}, \bar{z} = -13 + i$

3. (1) 原点と点 z_1 との距離 $|z_1|$ を r , z_1 を偏角 $\arg z_1$ を θ とすると、点 z_1 の極座標は $(r, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ となる. $\therefore z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$
 オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ を用いて $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ と表してもよい.



- (2) 点 z_2 の極座標は $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ となる.

$\therefore z_2 = 2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$



4. 前問の結果を用いる.

(1) $(1 + \sqrt{3}i)^6 = \left\{2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)\right\}^6 = 2^6\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)^6$
 $= 2^6\left(\cos \frac{6\pi}{3} + i \sin \frac{6\pi}{3}\right) = 64(\cos 2\pi + i \sin 2\pi)$
 $= 64(1 + i \cdot 0) = 64$

(2) $(\sqrt{3} + i)^4 = \left\{2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)\right\}^4 = 2^4\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^4$
 $= 2^4\left(\cos \frac{4\pi}{6} + i \sin \frac{4\pi}{6}\right) = 16\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right)$
 $= 16\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -8 + 8\sqrt{3}i$

5. 教科書 p.109 にある通り、2点 z_1, z_2 の距離は $|z_1 - z_2|$ により計算できる。また、複素数 $z = x + yi$ のとき、その絶対値は $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ により計算できることに注意せよ。

- (1) $|(2 + 3i) - (1 - i)| = |1 + 4i| = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$
 (2) $|2i - 4| = |-4 + 2i| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$