

第3章 4 「フーリエ変換と積分定理」 第3回

解答

1. (1) $\frac{1 - e^{-iu} - iu}{u^2}$

(2) 略 (解説参照)

(3) π

2. $\frac{2 + iu(e^{iu} - e^{-iu}) - (e^{iu} + e^{-iu})}{u^2}$

解説

1. (1) $F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux} dx$
 $= \int_0^1 (1-x)e^{-iux} dx$
 $= \left[-\frac{1-x}{iu} e^{-iux} \right]_0^1 - \frac{1}{iu} \int_0^1 e^{-iux} dx$
 $= 0 + \frac{1}{iu} - \frac{1}{iu} \left[-\frac{1}{iu} e^{-iux} \right]_0^1$
 $= \frac{1}{iu} - \frac{1}{u^2} (e^{-iu} - 1)$
 $= \frac{1 - e^{-iu} - iu}{u^2}$

(2) (1) で求めた $F(u)$ は $u = 0$ のとき分母が 0 となっている。

そこで $F(0)$ を定義式より直接求めると

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i0x} dx$$

$$= \int_0^1 (1-x) dx = \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

次に (1) で求めた $F(u)$ から

$$\lim_{u \rightarrow 0} F(u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-iu} - iu}{u^2}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{ie^{-iu} - i}{2u}$$

(\because ロピタルの定理)

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^{-iu}}{2}$$

(\because ロピタルの定理)

$$= \frac{1}{2}$$

したがって $F(0) = \lim_{u \rightarrow 0} F(u)$ が成り立っている。

(3) $f(x)$ は $x = 0$ で不連続で

$$\frac{f(-0) + f(+0)}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$$

だから、フーリエの積分定理を適用すると

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{ixu} du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-iu} - iu}{u^2} e^{ixu} du$$

$$= \begin{cases} 1-x & (0 < x \leq 1) \\ \frac{1}{2} & (x = 0) \\ 0 & (x < 0, 1 < x) \end{cases}$$

特に $x = 0$ のときを考えると

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-iu} - iu}{u^2} du = \frac{1}{2}$$

オイラーの公式を用いて書き換えると

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - (\cos u - i \sin u) - iu}{u^2} du = \pi$$

実部を比較して

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2} du = \pi$$

2. $G(u) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-iux} dx$

$$= \int_{-1}^0 xe^{-iux} dx + \int_0^1 -xe^{-iux} dx$$

$$= \left[-\frac{x}{iu} e^{-iux} \right]_{-1}^0 + \frac{1}{iu} \int_{-1}^0 e^{-iux} dx$$

$$+ \left[\frac{x}{iu} e^{-iux} \right]_0^1 - \frac{1}{iu} \int_0^1 e^{-iux} dx$$

$$= 0 - \frac{e^{iu}}{iu} + \frac{1}{iu} \left[-\frac{1}{iu} e^{-iux} \right]_{-1}^0$$

$$+ \frac{e^{-iu}}{iu} - 0 - \frac{1}{iu} \left[-\frac{1}{iu} e^{-iux} \right]_0^1$$

$$= -\frac{e^{iu}}{iu} + \frac{1}{u^2} (1 - e^{iu})$$

$$+ \frac{e^{-iu}}{iu} - \frac{1}{u^2} (e^{-iu} - 1)$$

$$= \frac{e^{-iu} - e^{iu}}{iu} + \frac{2 - e^{-iu} - e^{iu}}{u^2}$$

$$= \frac{2 + iu(e^{iu} - e^{-iu}) - (e^{iu} + e^{-iu})}{u^2}$$

(注) オイラーの公式により

$$e^{iu} + e^{-iu} = 2 \cos u$$

$$e^{iu} - e^{-iu} = 2i \sin u$$

だから

$$G(u) = \frac{2 + iu \cdot 2i \sin u - 2 \cos u}{u^2}$$

$$= \frac{2 - 2u \sin u - 2 \cos u}{u^2}$$

$$= \frac{2(1 - u \sin u - \cos u)}{u^2}$$

とも表せる。