第３章 ４ 「フーリエ変換と積分定理」 第２回

解答

1. (1) $\dfrac{e^{-2iu}-1}{u}i$

(2) 略（解説参照）

(3) π

2. $\dfrac{e^{2iu}+2e^{-iu}-3}{u}i$

解説

1. (1) $F(u)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\,dx$

$$=\int_0^2 e^{-iux}\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{iu}e^{-iux}\right]_0^2$$
$$=-\frac{1}{iu}\left(e^{-i2u}-1\right)$$
$$=\frac{e^{-2iu}-1}{u}i$$

(2) (1) で求めた $F(u)$ は $u=0$ のとき分母が 0 となっている．

そこで $F(0)$ を定義式より直接求めると

$$F(0)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i0x}\,dx$$
$$=\int_0^2 1\,dx=2$$

次に (1) で求めた $F(u)$ から

$$\lim_{u\to 0}F(u)=\lim_{u\to 0}\frac{e^{-2iu}-1}{u}i$$
$$=\lim_{u\to 0}\frac{-2ie^{-2iu}}{1}i$$

($\because$ ロピタルの定理)

$$=\lim_{u\to 0}2e^{-2iu}=2$$

したがって $F(0)=\lim\limits_{u\to 0}F(u)$ が成り立っている．

なお，複素関数についてもロピタルの定理が成り立つことは教科書 p.122 にある．

(3) $f(x)$ は $x=0,2$ で不連続で

$$\frac{f(-0)+f(+0)}{2}=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{f(2-0)+f(2+0)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

だから，フーリエの積分定理を適用すると

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(u)e^{ixu}\,du$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-2iu}-1}{u}ie^{ixu}\,du$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2u-i\sin 2u-1}{u}ie^{ixu}\,du$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2u+i(\cos 2u-1)}{u}e^{ixu}\,du$$
$$=\begin{cases}1 & (0<x<2)\\ \dfrac{1}{2} & (x=0,2)\\ 0 & (x<0,2<x)\end{cases}$$

特に $x=0$ のときを考えると

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2u+i(\cos 2u-1)}{u}\,du=\frac{1}{2}$$

実部を比較して

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2u}{u}\,du=\frac{1}{2}$$

となるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2u}{u}\,du=\pi$$

を得る．

2. $G(u)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-iux}\,dx$

$$=\int_{-2}^{0}(-1)e^{-iux}\,dx+\int_0^1 2e^{-iux}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{iu}e^{-iux}\right]_{-2}^{0}+2\left[-\frac{1}{iu}e^{-iux}\right]_0^1$$
$$=\frac{1-e^{i2u}}{iu}+2\frac{-e^{-iu}+1}{iu}$$
$$=\frac{3-e^{2iu}-2e^{-iu}}{iu}$$
$$=\frac{e^{2iu}+2e^{-iu}-3}{u}i$$