第3章 4 「フーリエ変換と積分定理」 第1回

解答

1. (1) 1　　(2) 0

2. $\dfrac{2(3-iu)}{9+u^2}$

3. π

解説

1. (1) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ だから

$$\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\left|e^{(-1+i)x}\right| = \lim_{x\to\infty}\left|e^{-x}\right|\left|e^{ix}\right|$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left|e^{-x}\right| = 0$$

複素数 α に対して $|\alpha| = 0$ と $\alpha = 0$ は同値だから

$$\lim_{x\to\infty} e^{(-1+i)x} = 0$$

2. $$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iux}\,dx$$

$$= \int_0^{\infty} 2e^{-3x}e^{-iux}\,dx = 2\int_0^{\infty} e^{-(3+iu)x}\,dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{-(3+iu)}e^{-(3+iu)x}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{2}{-(3+iu)}\left(\lim_{x\to\infty} e^{-(3+iu)x} - 1\right)$$

$$= \frac{2}{-(3+iu)}(0-1) = \frac{2}{3+iu}$$

$$= \frac{2(3-iu)}{(3+iu)(3-iu)} = \frac{2(3-iu)}{9+u^2}$$

3. **2**. の関数 $f(x)$ にフーリエの積分定理を適用する．$f(x)$ は $x=0$ で不連続で

$$\frac{f(-0)+f(+0)}{2} = \frac{0+2}{2} = 1$$

だから，**2**. の結果にフーリエの積分定理を適用すると

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{iux}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2(3-iu)}{9+u^2}e^{iux}\,du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3-iu}{9+u^2}\,e^{iux}\,du$$

$$= \begin{cases} 2e^{-3x} & (x>0) \\ 1 & (x=0) \\ 0 & (x<0) \end{cases}$$

特に $x=0$ のときを考えると

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3-iu}{9+u^2}\,du = 1$$

実部を比較して

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3}{9+u^2}\,du = 1$$

となるから

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3}{9+u^2}\,du = \pi$$

を得る．