第3章 3 「複素フーリエ級数」 第1回

解答

1. (1) 2　　(2) 0

(3) $-\dfrac{2}{3}$　　(4) 0

2. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}e^{i(2n+1)x}$

$=\cdots+\dfrac{1}{5\pi}e^{-5ix}-\dfrac{1}{3\pi}e^{-3ix}+\dfrac{1}{\pi}e^{-ix}+\dfrac{1}{2}$

$+\dfrac{1}{\pi}e^{ix}-\dfrac{1}{3\pi}e^{3ix}+\dfrac{1}{5\pi}e^{5ix}-\cdots$

解説

1. オイラーの公式

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

を利用する．

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-ix}\,dx=\left[\frac{1}{-i}e^{-ix}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{1}{-i}\left(e^{-\frac{\pi}{2}i}-e^{\frac{\pi}{2}i}\right)$

$=\dfrac{1}{-i}(-i-i)=\dfrac{-2i}{-i}=2$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-i2x}\,dx=\left[\frac{1}{-2i}e^{-i2x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{1}{-2i}\left(e^{-i\pi}-e^{i\pi}\right)$

$=\dfrac{1}{-2i}\big(-1-(-1)\big)=0$

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-i3x}\,dx=\left[\frac{1}{-3i}e^{-i3x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{1}{-3i}\left(e^{-\frac{3}{2}\pi i}-e^{\frac{3}{2}\pi i}\right)$

$=\dfrac{1}{-3i}\big(i-(-i)\big)=\dfrac{2i}{-3i}=-\dfrac{2}{3}$

(4) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-i4x}\,dx=\left[\frac{1}{-4i}e^{-i4x}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{1}{-4i}\left(e^{-i2\pi}-e^{i2\pi}\right)$

$=\dfrac{1}{-4i}(1-1)=0$

2. $c_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\;dx=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\;dx$

$=\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=\dfrac{1}{2}$

また，0 以外の整数 n について

$c_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-inx}\;dx=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-inx}\;dx$

$=\dfrac{1}{2\pi}\left[\dfrac{1}{-in}e^{-inx}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{1}{-2n\pi i}\left(\,e^{-\frac{n}{2}\pi i}-e^{\frac{n}{2}\pi i}\,\right)$

$=\dfrac{1}{-2n\pi i}\left(\,(-i)^n-i^n\,\right)$

$=\dfrac{1}{-2n\pi i}\left(\,(-1)^n i^n-i^n\,\right)$

k を整数として，$n=2k$（n が偶数）のときと，$n=2k+1$（n が奇数）のときに分ける．

(i) n が偶数のとき

$c_n=c_{2k}=\dfrac{1}{-4k\pi i}\left(\,(-1)^k-(-1)^k\,\right)=0$

(ii) n が奇数のとき

$c_n=c_{2k+1}=\dfrac{1}{-2(2k+1)\pi i}\left(-i^{2k+1}-i^{2k+1}\right)$

$=\dfrac{1}{-2(2k+1)\pi i}\left(-2i^{2k}i\right)$

$=\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)\pi}$

したがって，$f(x)$ の複素フーリエ級数は

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}e^{i(2n+1)x}$

$=\cdots+\dfrac{1}{5\pi}e^{-5ix}-\dfrac{1}{3\pi}e^{-3ix}+\dfrac{1}{\pi}e^{-ix}$

$+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\pi}e^{ix}-\dfrac{1}{3\pi}e^{3ix}+\dfrac{1}{5\pi}e^{5ix}-\cdots$