第 3 章 2 「一般の周期関数のフーリエ級数」 第 3 回

解答

1. $-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1+(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right)$

$$=-\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\left(\cos\pi x+\frac{1}{3^2}\cos 3\pi x+\frac{1}{5^2}\cos 5\pi x+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{\pi}\left(\sin\pi x+\frac{1}{2}\sin 2\pi x+\frac{1}{3}\sin 3\pi x+\cdots\right)$$

2. $-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{(-1)^n}{n\pi}\sin n\pi x\right)$

$$=-\frac{1}{4}+\frac{2}{\pi^2}\left(\cos\pi x+\frac{1}{3^2}\cos 3\pi x+\frac{1}{5^2}\cos 5\pi x+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{\pi}\left(-\sin\pi x+\frac{1}{2}\sin 2\pi x-\frac{1}{3}\sin 3\pi x+\cdots\right)$$

解説

1. $c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(-x-1)\,dx$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^2-x\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)$$
$$=-\frac{1}{4}$$

n を自然数として

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x-1)\cos n\pi x\,dx$$
$$=\left[-\frac{x+1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_{-1}^{0}+\frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{0}\sin n\pi x\,dx$$
$$=-\frac{1}{n\pi}\sin 0+0+\frac{1}{n^2\pi^2}\Big[-\cos n\pi x\Big]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{1}{n^2\pi^2}\Big(-\cos 0+\cos(-n\pi)\Big)$$
$$=\frac{-1+(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

$$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(-x-1)\sin n\pi x\,dx$$
$$=\left[\frac{x+1}{n\pi}\cos n\pi x\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{n\pi}\int_{-1}^{0}\cos n\pi x\,dx$$
$$=\frac{1}{n\pi}\cos 0-0-\frac{1}{n^2\pi^2}\Big[\sin n\pi x\Big]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{1}{n\pi}-\frac{1}{n^2\pi^2}\Big(\sin 0-\sin(-n\pi)\Big)$$
$$=\frac{1}{n\pi}$$

したがって，$f(x)$ のフーリエ級数は

$$-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1+(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x+\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right)$$
$$=-\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}\left(\cos\pi x+\frac{1}{3^2}\cos 3\pi x+\frac{1}{5^2}\cos 5\pi x+\cdots\right)$$
$$+\frac{1}{\pi}\left(\sin\pi x+\frac{1}{2}\sin 2\pi x+\frac{1}{3}\sin 3\pi x+\cdots\right)$$

2. $y=g(x)$ のグラフをかいてみると，$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものになっている．すなわち，$g(x)=f(x-1)$ が成り立つ．

実際

$$g(x+1)=\begin{cases}0 & (-1\leqq x+1<0)\\ -x-1 & (0\leqq x+1<1)\end{cases},$$
$$g(x+3)=g(x+1)$$

であり，$g(x+3)=g(x+1)$ は $g(x)$ が周期 2 の周期関数であることを表しているから，書き直すと

$$g(x+1)=\begin{cases}0 & (-2\leqq x<-1)\\ -x-1 & (-1\leqq x<0)\end{cases},$$
$$g(x+2)=g(x)$$

さらに，周期 2 であることを用いて

$$g(x+1)=\begin{cases}0 & (0\leqq x<1)\\ -x-1 & (-1\leqq x<0)\end{cases},$$
$$g(x+2)=g(x)$$

と表せ，$g(x+1)=f(x)$ すなわち $g(x)=f(x-1)$ であることがわかる．

したがって，$g(x)$ のフーリエ級数は，$f(x-1)$ のフーリエ級数となり

$$\cos\big(n\pi(x-1)\big)=\cos\big(n\pi x-n\pi\big)$$
$$=\cos n\pi x\cos n\pi+\sin n\pi x\sin n\pi$$
$$=(-1)^n\cos n\pi x$$
$$\sin\big(n\pi(x-1)\big)=\sin\big(n\pi x-n\pi\big)$$
$$=\sin n\pi x\cos n\pi-\cos n\pi x\sin n\pi$$
$$=(-1)^n\sin n\pi x$$

であることに注意すれば，$g(x)$ のフーリエ級数が求まる．