第３章 2 「一般の周期関数のフーリエ級数」 第２回

解答

1. (1) $\dfrac{1}{\pi}$　　(2) $-\dfrac{1}{\pi}$

(3) $\dfrac{4}{\pi^2}$　　(4) $\dfrac{4}{\pi^2}$

2. $\displaystyle \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$

$\displaystyle =\frac{8}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{2}-\cdots\right)$

解説

1. (1) $\displaystyle \int_0^1 x\sin\pi x\,dx$

$$=\left[-\frac{x}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1\cos\pi x\,dx$$
$$=-\frac{1}{\pi}\cos\pi+0+\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\big(\sin\pi-\sin 0\big)=\frac{1}{\pi}$$

(2) $\displaystyle \int_1^2(2-x)\sin\pi x\,dx$

$$=\left[-\frac{2-x}{\pi}\cos\pi x\right]_1^2-\frac{1}{\pi}\int_1^2\cos\pi x\,dx$$
$$=0+\frac{1}{\pi}\cos\pi-\frac{1}{\pi^2}\Big[\sin\pi x\Big]_1^2$$
$$=-\frac{1}{\pi}-\frac{1}{\pi^2}\big(\sin 2\pi-\sin\pi\big)=-\frac{1}{\pi}$$

(3) $\displaystyle \int_0^1 x\sin\frac{\pi x}{2}\,dx$

$$=\left[-\frac{2x}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right]_0^1+\frac{2}{\pi}\int_0^1\cos\frac{\pi x}{2}\,dx$$
$$=-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}+0+\frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2}\right]_0^1$$
$$=\frac{4}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{4}{\pi^2}$$

(4) $\displaystyle \int_1^2(2-x)\sin\frac{\pi x}{2}\,dx$

$$=\left[-\frac{2(2-x)}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right]_1^2-\frac{2}{\pi}\int_1^2\cos\frac{\pi x}{2}\,dx$$
$$=0+\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{2}\right]_1^2$$
$$=-\frac{4}{\pi^2}\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4}{\pi^2}$$

2. グラフからもわかるように，$f(x)$ は奇関数だから，自然数 n に対して $f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{2}$ も奇関数となり

$$c_0=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}f(x)\ dx=0$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\ dx=0$$

また，$f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{2}$ は偶関数となるから

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\ dx$$
$$=\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\ dx$$
$$=\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_1^2(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$
$$=\left[-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$
$$+\left[-\frac{2(2-x)}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_1^2-\frac{2}{n\pi}\int_1^2\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$
$$=-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}+0+\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_0^1$$
$$-0+\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{4}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi x}{2}\right]_1^2$$
$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-\sin 0-\sin n\pi+\sin\frac{n\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{8}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

k を自然数として，$n=2k-1$（n が奇数）のときと，$n=2k$（n が偶数）のときに分ける．

(i) n が奇数のとき

$$b_n=b_{2k-1}=\frac{8}{(2k-1)^2\pi^2}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}$$
$$=\frac{8(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2\pi^2}$$

(ii) n が偶数のとき

$$b_n=b_{2k}=\frac{2}{k^2\pi^2}\sin k\pi=0$$

したがって，$f(x)$ のフーリエ級数は

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}$$
$$=\frac{8}{\pi^2}\left(\sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{2}-\cdots\right)$$