第3章 2 「一般の周期関数のフーリエ級数」 第1回

解答

1. (1) $\dfrac{1}{\pi}$　　(2) 0

(3) $-\dfrac{1}{3\pi}$　　(4) 0

2. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos{(2n-1)\pi x}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\cos\pi x-\frac{1}{3}\cos 3\pi x+\frac{1}{5}\cos 5\pi x-\cdots\right)$$

解説

1. (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\pi x\,dx=\frac{1}{\pi}\Big[\sin\pi x\Big]_0^{\frac{1}{2}}$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{1}{\pi}(1-0)=\frac{1}{\pi}$$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\cos 2\pi x\,dx=\left[\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$$=\frac{1}{2\pi}(\sin\pi-\sin 0)=\frac{1}{2\pi}(0-0)=0$$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\cos 3\pi x\,dx=\left[\frac{1}{3\pi}\sin 3\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$$=\frac{1}{3\pi}\left(\sin\frac{3\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{1}{3\pi}(-1-0)$$

$$=-\frac{1}{3\pi}$$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\cos 4\pi x\,dx=\left[\frac{1}{4\pi}\sin 4\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$$=\frac{1}{4\pi}(\sin 2\pi-\sin 0)=\frac{1}{4\pi}(0-0)=0$$

2. $\displaystyle c_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\ dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ dx$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\ dx=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

また，自然数 n について，$\cos n\pi x$ は偶関数だから

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\ dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\cos n\pi x\ dx$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{2}}\cos n\pi x\ dx=2\left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2}-\sin 0\right)$$

$$=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

k を自然数として，$n=2k-1$（n が奇数）のときと，$n=2k$（n が偶数）のときに分ける．

(i) n が奇数のとき

$$a_n=a_{2k-1}=\frac{2}{(2k-1)\pi}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}$$

$$=\frac{2}{(2k-1)\pi}(-1)^{k-1}$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

(ii) n が偶数のとき

$$a_n=a_{2k}=\frac{1}{k\pi}\sin k\pi=0$$

同様に，$\sin n\pi x$ は奇関数だから

$$b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x\ dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\sin n\pi x\ dx$$

$$=0$$

したがって，$f(x)$ のフーリエ級数は

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cos{(2k-1)\pi x}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\cos\pi x-\frac{1}{3}\cos 3\pi x+\frac{1}{5}\cos 5\pi x-\cdots\right)$$