第 3 章 1 「周期 2π の関数のフーリエ級数」 第 3 回

解答

1. $-\dfrac{\pi}{4}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\dfrac{(-1)^n}{n}\sin nx\right)$

$$= -\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$
$$+\left(-\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots\right)$$

2. $-\dfrac{\pi}{4}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$

$$= -\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$
$$+\left(\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x-\cdots\right)$$

解説

1. $c_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\ dx=\dfrac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(-x)\,dx$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi}=-\frac{1}{4\pi}\left(\pi^2-0\right)$$
$$=-\frac{\pi}{4}$$

n を自然数として

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\ dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-x)\cos nx\ dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{x}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right\}$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\{-\frac{1}{n}\left(\pi\sin n\pi-0\right)+\frac{1}{n}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}\right\}$$
$$=\frac{1}{n^2\pi}\left(-\cos n\pi+\cos 0\right)$$
$$=\frac{-(-1)^n+1}{n^2\pi}=\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\ dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-x)\sin nx\ dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{x}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right\}$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{n}\left(\pi\cos n\pi-0\right)-\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}\right\}$$
$$=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{(-1)^n\pi}{n}-\frac{1}{n^2}\left(\sin n\pi-\sin 0\right)\right\}$$
$$=\frac{(-1)^n}{n}$$

したがって，$f(x)$ のフーリエ級数は

$$-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right)$$
$$= -\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$
$$+\left(-\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots\right)$$

2. $y=g(x)$ のグラフをかいてみると，$y=f(x)$ のグラフと y 軸対称となっていることがわかる．すなわち，$g(x)=f(-x)$ が成り立つ．

実際

$$g(-x)=\begin{cases}-x & (-\pi<-x\leqq 0)\\ 0 & (0<-x\leqq\pi)\end{cases}$$

だから，x の範囲を書き直すと

$$g(-x)=\begin{cases}0 & (-\pi\leqq x<0)\\ -x & (0\leqq x<\pi)\end{cases}$$

となり，$g(-x)=f(x)$ すなわち $g(x)=f(-x)$ であることがわかる．

したがって，$g(x)$ のフーリエ級数は，$f(-x)$ のフーリエ級数となり

$$\cos(-nx)=\cos nx,\quad \sin(-nx)=-\sin nx$$

であることに注意すれば，$g(x)$ のフーリエ級数が求まる．