

第3章 1 「周期 2π の関数のフーリエ級数」 第2回

解答

1. (1) 1

(2) $\frac{\pi}{4}$

(3) 1

(4) $-\frac{\pi}{4}$

2.
$$\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)x$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\sin x - \frac{1}{3^2} \sin 3x + \frac{1}{5^2} \sin 5x - \dots \right)$$

解説

1. (1)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx = \left[-x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + 0 + \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$$

(2)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x \, dx$$

$$= \left[-\frac{x}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx$$

$$= -\frac{\pi}{4} \cos \pi + 0 + \frac{1}{4} \left[\sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} (\sin \pi - \sin 0) = \frac{\pi}{4}$$

(3)
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin x \, dx$$

$$= \left[-(\pi - x) \cos x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx$$

$$= 0 + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= -\sin \pi + \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

(4)
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin 2x \, dx$$

$$= \left[-\frac{\pi - x}{2} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos 2x \, dx$$

$$= 0 + \frac{\pi}{4} \cos \pi - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} (\sin 2\pi - \sin \pi) = -\frac{\pi}{4}$$

2. グラフからもわかるように、 $f(x)$ は奇関数だから、自然数 n に対して $f(x) \cos nx$ も奇関数となり

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 0$$

また、 $f(x) \sin nx$ は偶関数となるから

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin nx \, dx \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[-\frac{x}{n} \cos nx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx \, dx \right.$$

$$\left. + \left[-\frac{\pi - x}{n} \cos nx \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nx \, dx \right\}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ -\frac{\pi}{2n} \cos \frac{n\pi}{2} + 0 + \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right.$$

$$\left. - 0 + \frac{\pi}{2n} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n} \sin nx \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right\}$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi} \left\{ \sin \frac{n\pi}{2} - \sin 0 - \sin n\pi + \sin \frac{n\pi}{2} \right\}$$

$$= \frac{4}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

k を自然数として、 $n = 2k - 1$ (n が奇数) のときと、 $n = 2k$ (n が偶数) のときに分ける。

(i) n が奇数のとき

$$b_n = b_{2k-1} = \frac{4}{(2k-1)^2 \pi} \sin \frac{(2k-1)\pi}{2}$$

$$= \frac{4(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2 \pi}$$

(ii) n が偶数のとき

$$b_n = b_{2k} = \frac{1}{k^2 \pi} \sin k\pi = 0$$

したがって、 $f(x)$ のフーリエ級数は

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin(2k-1)x$$

$$= \frac{4}{\pi} \left(\sin x - \frac{1}{3^2} \sin 3x + \frac{1}{5^2} \sin 5x - \dots \right)$$