第3章 1 「周期2πの関数のフーリエ級数」 第1回

解答

1. (1) 1　　(2) 0

(3) $-\dfrac{1}{3}$　　(4) 0

2. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cos(2n-1)x$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\left(\cos x-\dfrac{1}{3}\cos 3x+\dfrac{1}{5}\cos 5x-\cdots\right)$

解説

1. (1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\sin\dfrac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx=\Big[\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{1}{2}(\sin\pi-\sin 0)=\dfrac{1}{2}(0-0)=0$

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 3x\,dx=\Big[\frac{1}{3}\sin 3x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{1}{3}\left(\sin\dfrac{3\pi}{2}-\sin 0\right)=\dfrac{1}{3}(-1-0)$

$=-\dfrac{1}{3}$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4x\,dx=\Big[\frac{1}{4}\sin 4x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{1}{4}(\sin 2\pi-\sin 0)=\dfrac{1}{4}(0-0)=0$

2. $c_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}dx$

$=\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{\pi}{2}-\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=\dfrac{1}{2}$

nを自然数として，$\cos nx$は偶関数だから

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,dx$

$=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\Big[\frac{1}{n}\sin nx\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{2}{n\pi}\left(\sin\dfrac{n\pi}{2}-\sin 0\right)$

$=\dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2}$

kを自然数として，$n=2k-1$（nが奇数）のときと，$n=2k$（nが偶数）のときに分ける．

(i) nが奇数のとき

$a_n=a_{2k-1}=\dfrac{2}{(2k-1)\pi}\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2}$

$=\dfrac{2}{(2k-1)\pi}(-1)^{k-1}$

$=\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$

(ii) nが偶数のとき

$a_n=a_{2k}=\dfrac{1}{k\pi}\sin k\pi=0$

次に，$\sin nx$は奇関数だから

$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin nx\,dx$

$=0$

したがって，$f(x)$のフーリエ級数は

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\cos(2k-1)x$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{\pi}\left(\cos x-\dfrac{1}{3}\cos 3x+\dfrac{1}{5}\cos 5x-\cdots\right)$