

第2章 4 「微分方程式への応用 (その2)」 第3回

解答

1. (1) $x(t) = te^{3t}$

(2) $x(t) = \frac{1}{8} \sin t + \frac{1}{24} \sin 3t$

解説

1. (1) $x'(0) = \alpha$ とおき、 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - x(0)s - x'(0) = s^2X(s) - \alpha, \quad \mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s)$$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$s^2X(s) - \alpha - 6sX(s) + 9X(s) = 0$$

$$X(s) = \frac{\alpha}{s^2 - 6s + 9} = \frac{\alpha}{(s-3)^2} \quad \therefore x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \alpha te^{3t}$$

$x(1) = e^3$ から $\alpha e^3 = e^3$ すなわち $\alpha = 1$

したがって、求める解は $x(t) = te^{3t}$

(2) $x'(0) = \alpha$ とおき、 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - x(0)s - x'(0) = s^2X(s) - \alpha$$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$s^2X(s) - \alpha + 9X(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)} + \frac{\alpha}{s^2 + 9}$$

右辺を次のように部分分数に分解する $\frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)} + \frac{\alpha}{s^2 + 9} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 9} + \frac{\alpha}{s^2 + 9}$

このとき $A = 0, B = \frac{1}{8}, C = 0, D = -\frac{1}{8}$

$$\begin{aligned} \therefore x(t) &= \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{8} \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{1}{8} \frac{1}{s^2 + 9} + \frac{\alpha}{s^2 + 9}\right] \\ &= \frac{1}{8} \sin t - \frac{1}{24} \sin 3t + \frac{\alpha}{3} \sin 3t \end{aligned}$$

$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{12}$ から $\frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{\alpha}{3} = \frac{1}{12}$ すなわち $\alpha = \frac{1}{4}$

したがって、求める解は $x(t) = \frac{1}{8} \sin t - \frac{1}{24} \sin 3t + \frac{1}{12} \sin 3t = \frac{1}{8} \sin t + \frac{1}{24} \sin 3t$