第2章 4 「微分方程式への応用（その2）」 第2回

解答

1. (1) $x(t)=e^t-e^{2t}$ (2) $x(t)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\cos 2t+\dfrac{3}{4}\sin 2t$

解説

1. (1) $x'(0)=\alpha$ とおき，$\mathcal{L}[x(t)]=X(s)$ とすると

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]=s^2X(s)-x(0)s-x'(0)=s^2X(s)-\alpha,\ \mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right]=sX(s)-x(0)=sX(s)$$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$s^2X(s)-\alpha-3sX(s)+2X(s)=0$$

$$X(s)=\frac{\alpha}{s^2-3s+2}=\frac{\alpha}{(s-1)(s-2)}$$

右辺を次のように部分分数に分解する $\dfrac{\alpha}{(s-1)(s-2)}=\dfrac{A}{s-1}+\dfrac{B}{s-2}$

このとき $A=-\alpha,\ B=\alpha$

$$\therefore\ x(t)=\mathcal{L}^{-1}[X(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\alpha}{s-1}+\frac{\alpha}{s-2}\right]=-\alpha e^t+\alpha e^{2t}$$

$x(1)=e-e^2$ から $-\alpha e+\alpha e^2=e-e^2$ すなわち $\alpha=-1$

したがって，求める解は $x(t)=e^t-e^{2t}$

(2) $x'(0)=\alpha$ とおき，$\mathcal{L}[x(t)]=X(s)$ とすると

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]=s^2X(s)-x(0)s-x'(0)=s^2X(s)-\alpha$$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$s^2X(s)-\alpha+4X(s)=\frac{1}{s}$$

$$X(s)=\frac{1}{s(s^2+4)}+\frac{\alpha}{s^2+4}$$

右辺を次のように部分分数に分解する $\dfrac{1}{s(s^2+4)}+\dfrac{\alpha}{s^2+4}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{Bs+C}{s^2+4}+\dfrac{\alpha}{s^2+4}$

このとき $A=\dfrac{1}{4},\ B=-\dfrac{1}{4},\ C=0$

$$\therefore\ x(t)=\mathcal{L}^{-1}[X(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4}\frac{1}{s}-\frac{1}{4}\frac{s}{s^2+4}+\frac{\alpha}{s^2+4}\right]=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{\alpha}{2}\sin 2t$$

$x\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ から $\dfrac{1}{4}+\dfrac{\alpha}{2}=1$ すなわち $\alpha=\dfrac{3}{2}$

したがって，求める解は $x(t)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\cos 2t+\dfrac{3}{4}\sin 2t$