第2章 4 「微分方程式への応用（その2）」 第1回

解答

1. (1) $x(t) = e^{2t}\sin t$　　(2) $x(t) = 1 - \cos t - \sin t$

解説

1. (1) $x'(0) = \alpha$ とおき，$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - x(0)s - x'(0) = s^2X(s) - \alpha,\ \mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s)$$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$s^2X(s) - \alpha - 4sX(s) + 5X(s) = 0$$

$$X(s) = \frac{\alpha}{s^2 - 4s + 5} = \frac{\alpha}{(s-2)^2 + 1} \qquad \therefore\ x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \alpha e^{2t}\sin t$$

$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi}$ から $\alpha e^{\pi} = e^{\pi}$　すなわち　$\alpha = 1$

したがって，求める解は　$x(t) = e^{2t}\sin t$

(2) $x'(0) = \alpha$ とおき，$\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - x(0)s - x'(0) = s^2X(s) - \alpha$$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると

$$s^2X(s) - \alpha + X(s) = \frac{1}{s}$$

$$(s^2+1)X(s) = \frac{1}{s} + \alpha$$

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} + \frac{\alpha}{s^2+1}$$

右辺を次のように部分分数に分解する　$\dfrac{1}{s(s^2+1)} + \dfrac{\alpha}{s^2+1} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{Bs+C}{s^2+1} + \dfrac{\alpha}{s^2+1}$

このとき　$A = 1,\ B = -1,\ C = 0$

$$\therefore\ x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} + \frac{-s}{s^2+1} + \frac{\alpha}{s^2+1}\right] = 1 - \cos t + \alpha\sin t$$

$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ から $1 + \alpha = 0$　すなわち　$\alpha = -1$

したがって，求める解は　$x(t) = 1 - \cos t - \sin t$