第２章 3 「微分方程式への応用（その１）」 第３回

解答

1. (1) $x(t) = te^{2t}$　　(2) $x(t) = 2 - e^{-t}$

(1) $x(t) = \dfrac{1}{4}e^{t} + \dfrac{1}{4}(3+2t)e^{-t}$　　(2) $x(t) = -\dfrac{1}{4}e^{t} + \dfrac{1}{20}e^{3t} + \dfrac{1}{5}\cos t + \dfrac{1}{10}\sin t$

解説

1. (1) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると　$\mathcal{L}\left[\dfrac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s)$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると　$sX(s) - 2X(s) = \dfrac{1}{s-2}$

整理すると　$X(s) = \dfrac{1}{(s-2)^2}$

したがって　$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(s-2)^2}\right] = te^{2t}$

(2) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると　$\mathcal{L}\left[\dfrac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると　$sX(s) - 1 + X(s) = \dfrac{2}{s}$

整理すると　$X(s) = \dfrac{s+2}{s(s+1)}$

右辺を次のように部分分数分解する　$\dfrac{s+2}{s(s+1)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+1}$

このとき　$A = 2,\ B = -1$

したがって　$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{2}{s} + \dfrac{-1}{s+1}\right] = 2 - e^{-t}$

2. (1) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると　$\mathcal{L}\left[\dfrac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - s,\ \mathcal{L}\left[\dfrac{dx}{dt}\right] = sX(s) - 1$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると　$s^2X(s) - s + 2sX(s) - 2 + X(s) = \dfrac{1}{s-1}$

整理すると　$X(s) = \dfrac{1}{(s-1)(s+1)^2} + \dfrac{s+2}{(s+1)^2} = \dfrac{s^2+s-1}{(s-1)(s+1)^2}$

右辺を次のように部分分数分解する　$\dfrac{s^2+s-1}{(s-1)(s+1)^2} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s+1} + \dfrac{C}{(s+1)^2}$

このとき　$A = \dfrac{1}{4},\ B = \dfrac{3}{4},\ C = \dfrac{1}{2}$

したがって　$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{s+1} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(s+1)^2}\right]$

$= \dfrac{1}{4}e^{t} + \dfrac{3}{4}e^{-t} + \dfrac{1}{2}te^{-t} = \dfrac{1}{4}e^{t} + \dfrac{1}{4}(3+2t)e^{-t}$

(2) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると　$\mathcal{L}\left[\dfrac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s),\ \mathcal{L}\left[\dfrac{dx}{dt}\right] = sX(s)$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると　$s^2X(s) - 4sX(s) + 3X(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$

整理すると　$X(s) = \dfrac{1}{(s^2-4s+3)(s^2+1)} = \dfrac{1}{(s-1)(s-3)(s^2+1)}$

右辺を次のように部分分数分解する　$\dfrac{1}{(s-1)(s-3)(s^2+1)} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{s-3} + \dfrac{Cs+D}{s^2+1}$

このとき　$A = -\dfrac{1}{4},\ B = \dfrac{1}{20},\ C = \dfrac{1}{5},\ D = \dfrac{1}{10}$

したがって　$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{1}{20}\dfrac{1}{s-3} + \dfrac{1}{5}\dfrac{s}{s^2+1} + \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{s^2+1}\right]$

$= -\dfrac{1}{4}e^{t} + \dfrac{1}{20}e^{3t} + \dfrac{1}{5}\cos t + \dfrac{1}{10}\sin t$