第 2 章 3 「微分方程式への応用（その 1）」 第 2 回

解答

1. (1) $x(t) = (1+2t)e^t$ (2) $x(t) = -e^{-3t} + \cos 3t + \sin 3t$

2. (1) $x(t) = \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{9}t - \dfrac{1}{27}(1+6t)e^{-3t}$ (2) $x(t) = \dfrac{1}{3}(-2+9t)e^t + \dfrac{2}{3}e^{-2t}$

解説

1. (1) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると $\mathcal{L}\left[\dfrac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると $sX(s) - 1 - X(s) = \dfrac{2}{s-1}$

整理すると $X(s) = \dfrac{s+1}{(s-1)^2}$

右辺を次のように部分分数分解する $\dfrac{s+1}{(s-1)^2} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{(s-1)^2}$

このとき $A = 1,\ B = 2$

したがって $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{2}{(s-1)^2}\right] = e^t + 2te^t = (1+2t)e^t$

(2) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると $\mathcal{L}\left[\dfrac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s)$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると $sX(s) + 3X(s) = \dfrac{6s}{s^2+9}$

整理すると $X(s) = \dfrac{6s}{(s+3)(s^2+9)}$

右辺を次のように部分分数分解する $\dfrac{6s}{(s+3)(s^2+9)} = \dfrac{A}{s+3} + \dfrac{Bs+C}{s^2+9}$

このとき $A = -1,\ B = 1,\ C = 3$

したがって $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\dfrac{1}{s+3} + \dfrac{s}{s^2+9} + \dfrac{3}{s^2+9}\right]$

$= -e^{-3t} + \cos 3t + \sin 3t$

2. (1) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると $\mathcal{L}\left[\dfrac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - x(0)s - x'(0) = s^2X(s),\ \mathcal{L}\left[\dfrac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s)$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると $s^2X(s) + 6sX(s) + 9X(s) = \dfrac{1}{s^2} + \dfrac{1}{s}$

整理すると $X(s) = \dfrac{s+1}{s^2(s^2+6s+9)} = \dfrac{s+1}{s^2(s+3)^2}$

右辺を次のように部分分数分解する $\dfrac{s+1}{s^2(s+3)^2} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s^2} + \dfrac{C}{s+3} + \dfrac{D}{(s+3)^2}$

このとき $A = \dfrac{1}{27},\ B = \dfrac{1}{9},\ C = -\dfrac{1}{27},\ D = -\dfrac{2}{9}$

したがって $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{27}\dfrac{1}{s} + \dfrac{1}{9}\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{1}{27}\dfrac{1}{s+3} - \dfrac{2}{9}\dfrac{1}{(s+3)^2}\right]$

$= \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{9}t - \dfrac{1}{27}e^{-3t} - \dfrac{2}{9}te^{-3t} = \dfrac{1}{27} + \dfrac{1}{9}t - \dfrac{1}{27}(1+6t)e^{-3t}$

(2) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると $\mathcal{L}\left[\dfrac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - 1,\ \mathcal{L}\left[\dfrac{dx}{dt}\right] = sX(s)$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると $s^2X(s) - 1 + sX(s) - 2X(s) = \dfrac{9}{s-1}$

整理すると $X(s) = \dfrac{s+8}{(s-1)(s^2+s-2)} = \dfrac{s+8}{(s-1)^2(s+2)}$

右辺を次のように部分分数分解する $\dfrac{s+8}{(s-1)^2(s+2)} = \dfrac{A}{s-1} + \dfrac{B}{(s-1)^2} + \dfrac{C}{s+2}$

このとき $A = -\dfrac{2}{3},\ B = 3,\ C = \dfrac{2}{3}$

したがって $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{s-1} + \dfrac{3}{(s-1)^2} + \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{s+2}\right]$

$= -\dfrac{2}{3}e^t + 3te^t + \dfrac{2}{3}e^{-2t} = \dfrac{1}{3}(-2+9t)e^t + \dfrac{2}{3}e^{-2t}$