第 2 章 3 「微分方程式への応用（その 1）」 第 1 回

解答

1. (1) $x(t) = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}t + \frac{10}{9}e^{-3t}$　　(2) $x(t) = \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{3}{4}\cos 2t - \frac{3}{4}\sin 2t$

2. $x(t) = \frac{1}{2}e^{t} - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$

解説

1. (1) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると　$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s) - 1$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると　$sX(s) - 1 + 3X(s) = \frac{1}{s^2}$

整理すると　$X(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s+3)}$

右辺を次のように部分分数分解する　$\frac{s^2+1}{s^2(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+3}$

このとき　$A = -\frac{1}{9},\ B = \frac{1}{3},\ C = \frac{10}{9}$

したがって　$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{9}\frac{1}{s} + \frac{1}{3}\frac{1}{s^2} + \frac{10}{9}\frac{1}{s+3}\right] = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}t + \frac{10}{9}e^{-3t}$

(2) $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると　$\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s)$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると　$sX(s) - 2X(s) = \frac{6}{s^2+4}$

整理すると　$X(s) = \frac{6}{(s-2)(s^2+4)}$

右辺を次のように部分分数分解する　$\frac{6}{(s-2)(s^2+4)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$

このとき　$A = \frac{3}{4},\ B = -\frac{3}{4},\ C = -\frac{3}{2}$

したがって　$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{4}\frac{1}{s-2} - \frac{3}{4}\frac{s}{s^2+4} - \frac{3}{2}\frac{1}{s^2+4}\right] = \frac{3}{4}e^{2t} - \frac{3}{4}\cos 2t - \frac{3}{4}\sin 2t$

2. $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ とすると　$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] = s^2X(s) - x(0)s - x'(0) = s^2X(s),\ \mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] = sX(s) - x(0) = sX(s)$

与えられた微分方程式の両辺のラプラス変換を求めると　$s^2X(s) - 3sX(s) + 2X(s) = \frac{1}{s-3}$

整理すると　$X(s) = \frac{1}{(s^2-3s+2)(s-3)} = \frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)}$

右辺を次のように部分分数分解する　$\frac{1}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$

このとき　$A = \frac{1}{2},\ B = -1,\ C = \frac{1}{2}$

したがって　$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{s-3}\right] = \frac{1}{2}e^{t} - e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$